



FACULTEIT WETENSCHAPPEN  
VAKGROEP FYSICA EN STERRENKUNDE  
ACADEMIEJAAR 2014–2015

# EEN INTRODUCTIE TOT HET VIJFDIMENSIONALE ZWART GAT IN SNAARTHEORIE

ELIA VAN WOLPUTTE

*Promotor:* Prof. dr. HENRI VERSHELDE

*Begeleider:* THOMAS MERTENS

Thesis ingediend tot het behalen van de graad van  
Master of Science in de fysica en de sterrenkunde

## Abstract

Deze thesis is een introductie tot het vijfdimensionale zwart gat in snaartheorie. Als vertrekpunt nemen we  $p$ -branen in supergravitatie, deze vormen een eerste weg langs dewelke we de entropie van het zwart gat berekenen. Vervolgens blijkt dat deze entropie ook bekomen kan worden in snaartheorie, meer bepaald door het zwart gat te modelleren als een superpositie van  $D1$ -branen,  $D5$ -branen en momentum. Dit  $D$ -braan model is daarnaast ook in staat om Hawkingstraling te produceren.

# Dankwoord

Mocht lang geleden iemand me verteld hebben dat ik ooit een thesis zou mogen schrijven over zwarte gaten in snaartheorie, zou mijn geluk niet opkunnen. Zonder de tussenkomst van verschillende mensen was dit niet mogelijk geweest en deze personen zou ik hier graag bedanken.

In de eerste plaats mijn promotor, Prof. Verschelde en mijn begeleider, Thomas Mertens. Dankzij hen heb ik de mogelijkheid gekregen om dit onderwerp te kiezen. Daarnaast moet ik Thomas extra bedanken voor het constant in goede banen leiden van mijn thesis. Bij hem kon ik altijd terecht met mijn (al dan niet triviale) vragen, waarop ik steevast een verhelderend antwoord kreeg. Ook de suggesties van interessante bronnen waren werkelijk van onschatbare waarde.

Tijdens het schrijven van deze thesis heb ik allicht meer tijd doorgebracht in een bibliotheek dan een doorsnee bibliothecaris. In dit verband wil ik Camiel en Dries graag bedanken voor hun aangenaam gezelschap in de bib. Mijn twee medestudenten en vrienden, Jannes en Jens T., verdienen hier ook een plaats, zowel in de aula als erbuiten kon ik altijd op hen rekenen. Verder ben ik ook Jens P. en de andere muzikanten dank verschuldigd om nu en dan voor de nodige ontspanning te zorgen. Ik kan me de voorbije jaren in Gent werkelijk niet voorstellen zonder al deze fijne mensen om mij heen.

De rol van mijn ouders in dit alles kan onmogelijk overschat worden. Zonder hun onvoorwaardelijke steun en vertrouwen had ik dit simpelweg nooit kunnen doen. Ook mijn broer Iwan stond steeds achter mij. Ik kan alleen maar zeggen dat ik mezelf enorm gelukkig prijs dat deze drie mensen te allen tijde paraat staan en mij steunen in mijn keuzes.

Finally, I would like to thank Reyes. She has meant the world to me during this past “year of the thesis”. The eternal support and encouragement were truly invaluable.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>7</b>
1.1	Snaren . . . . .	7
1.1.1	De twee acties van snaartheorie . . . . .	7
1.1.2	Bewegingsvergelijking . . . . .	9
1.1.3	Constraints en Virasoro-operators . . . . .	11
1.1.4	Spectrum van de snaar . . . . .	13
1.1.5	De dimensionaliteit van de targetruimte . . . . .	17
1.1.6	CFT . . . . .	18
1.2	Supersnaren . . . . .	20
1.2.1	Bewegingsvergelijking en randvoorwaarden . . . . .	20
1.2.2	Bespreking sectoren . . . . .	22
1.3	Branen . . . . .	23
1.3.1	Open snaar tussen twee branen . . . . .	23
1.3.2	DBI-actie en Yang-Millstheorie . . . . .	24
<b>2</b>	<b><math>p</math>-Branen en zwarte gaten in supergravitatie</b>	<b>27</b>
2.1	$p$ -Branen in supergravitatie . . . . .	27
2.1.1	Effectieve actie . . . . .	28
2.1.2	Sugra actie . . . . .	31
2.1.3	Oplossing . . . . .	33
2.2	Naar een theorie met minder dan tien dimensies . . . . .	34
2.2.1	Compactificatie . . . . .	35
2.2.2	Geometrisch karakter van lading . . . . .	42
2.2.3	Periodieke oplossing . . . . .	43
2.3	U-dualiteit . . . . .	45
2.3.1	T-Dualiteit . . . . .	45
2.3.2	S-dualiteit . . . . .	48
2.4	Uitwerking van de coëfficiënten $c_p$ . . . . .	49
2.4.1	Op zoek naar de massa van de braan . . . . .	49
2.4.2	Massabepaling met U-dualiteit . . . . .	54
2.4.3	Coëfficiënten bepalen . . . . .	56
2.5	Vijfdimensionaal zwart gat . . . . .	59

2.5.1	Extremaal geval . . . . .	60
2.5.2	Nonextremaal geval . . . . .	67
<b>3</b>	<b><i>D</i>-braan model</b>	<b>71</b>
3.1	Inleiding . . . . .	71
3.1.1	Constituent brane model . . . . .	72
3.2	Extremaal zwart gat . . . . .	76
3.2.1	Het model . . . . .	76
3.2.2	Effectieve snaar benadering . . . . .	80
3.2.3	De ijktheorie . . . . .	83
3.2.4	De entropieformule . . . . .	87
3.3	Non-extremaal zwart gat en Hawkingstraling . . . . .	93
3.3.1	Inleiding . . . . .	93
3.3.2	Hawkingstraling . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Besluit</b>	<b>100</b>
<b>A</b>	<b>Tetradformalisme</b>	<b>102</b>
A.1	Inleiding . . . . .	102
A.2	Spinconnectie . . . . .	103
A.3	Kromming en torsie . . . . .	105
<b>B</b>	<b>Berekening harmonische functie</b>	<b>106</b>
B.1	Spinconnectie bepalen . . . . .	107
B.2	Krommingstensor . . . . .	108
B.2.1	$R_{kl}^{ij}$ . . . . .	108
B.2.2	$R_{jb}^{ia}$ . . . . .	109
B.2.3	$R_{cd}^{ab}$ . . . . .	110
B.3	Riccitensor . . . . .	111
B.3.1	$R_j^i$ . . . . .	112
B.3.2	$R_b^a$ . . . . .	113
B.4	Ricciscalar en bewegingsvergelijking . . . . .	114
B.5	Ricciscalar in 10 dimensies . . . . .	116
B.5.1	Bewegingsvergelijking sugra . . . . .	117
<b>C</b>	<b>BPS-toestand</b>	<b>120</b>
C.1	Poincaré-symmetrie . . . . .	120
C.2	Supersymmetrie-algebra . . . . .	120
C.2.1	Massaloos supermultiplet . . . . .	121
C.2.2	Massief supermultiplet . . . . .	122
C.3	Uitgebreide supersymmetrie . . . . .	122
C.3.1	Massaloze representaties van $\mathcal{N} > 1$ supersymmetrie . . . . .	122
C.3.2	Massieve representaties van $\mathcal{N} > 1$ supersymmetrie . . . . .	123

<b>D Reissner-Nordströmmetrik</b>	<b>126</b>
D.1 Entropieberekening van het vijfdimensionaal zwart gat . . . . .	127

# Hoofdstuk 1

## Inleiding

Deze inleiding is bedoeld als een snelle herhaling (of, in mindere mate, als een extreem beknopte introductie) van (super)snaartheorie en  $D$ -branen. De keuze van de behandelde onderwerpen is volkomen gedirigeerd door wat nodig en/of relevant is om de hierop volgende hoofdstukken vlot te kunnen begrijpen. Enkele belangrijke concepten<sup>1</sup> in snaartheorie die van groot belang zijn voor wat nog komen gaat, zijn zelfs compleet overgeheveld naar de volgende hoofdstukken. Deze inleiding combineert voornamelijk elementen uit [1] [2] [3] en [4].<sup>2</sup>

### 1.1 Snaren

#### 1.1.1 De twee acties van snaartheorie

Beschouw een Minkowskiruimte met  $D$  dimensies die we de *targetruimte* noemen. Het infinitesimale ruimtetijdelement  $ds^2$  wordt

$$ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = -dX^0 dX^0 + \sum_{i=1}^{D-1} dX^i dX^i \quad (1.1)$$

Een deeltje in zo'n ruimtetijd beschrijft een wereldlijn, een ééndimensionaal pad door de ruimtetijd. Het basisingrediënt van snaartheorie is de snaar en niet het deeltje. Het direct gevolg hiervan is dat men in snaartheorie niet kan spreken van wereldlijnen, maar wel van hun tweedimensionaal analogon, het *wereldblad*. We parametriseren het wereldblad met twee coördinaten  $X^\mu(\sigma^0, \sigma^1)$ . Het  $ds^2$  op het wereldblad wordt dan

$$ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma^\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta = h_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta \quad (1.2)$$

Hier zien we  $h_{\alpha\beta}$  naar voren komen als een geïnduceerde metriek op<sup>3</sup> het wereldblad.

---

<sup>1</sup>Met name het concept van een *low energy effective action* en U-dualiteit

<sup>2</sup>En hiermee zijn ook meteen de nodige referenties gegeven voor de lezer die geïnteresseerd is in een uitgebreide introductie tot (super)snaartheorie.

<sup>3</sup>Deze metriek kan ook bekeken worden als de pull-back van de targetruimte metriek op het wereldblad. Hoe men het ook bekijkt, belangrijk is dat deze metriek zowel verband houdt met het wereldblad  $(\sigma^\alpha, \sigma^\beta)$  als met de targetruimte  $(X^\mu)$ .

$$h_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma^\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (1.3)$$

Zoals de dynamica van een puntdeeltje beschreven wordt door een actie evenredig met de lengte van de wereldlijn die het deeltje beschrijft, poneert men vervolgens dat de dynamica van de snaar beschreven wordt door een actie die evenredig is met de oppervlakte van het wereldblad die de snaar beschrijft. Dit noemt men de *Nambu-Goto actie*.

$$S_{NG} = -T \int d\sigma^0 d\sigma^1 \sqrt{-h}$$

met  $h = \det h_{\alpha\beta}$  (1.4)

Indien men de parameters  $\sigma^0, \sigma^1$  van het wereldblad beschouwt als abstracte ruimte, kan men ook in die ruimte een *intrinsieke metriek*<sup>4</sup> definiëren

$$ds^2 = \gamma_{ab} d\sigma^a d\sigma^b \quad (1.5)$$

Gewapend met die nieuwe metriek kan men dan de volgende actie opschrijven:

$$S_{Polyakov} = -\frac{T}{2} \int d\sigma^0 d\sigma^1 (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} h_{ab} \quad (1.6)$$

Waarvan we willen dat ze equivalent is met de Nambu-Goto actie. Eisen dat de equivalentie geldt, volgt uit  $\delta S_P = 0$  bij variatie van de intrinsieke metriek. De variatie van de determinant is

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= -\gamma\gamma_{ab}\delta\gamma^{ab} \\ \delta\sqrt{-\gamma} &= \frac{-1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma_{ab}\delta\gamma^{ab} \end{aligned} \quad (1.7)$$

De variatie van de Polyakovactie wordt dan

$$\begin{aligned} \delta S_P &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma (-\gamma)^{1/2} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \delta\gamma^{ab} + \frac{-1}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma_{ab} \delta\gamma^{ab} \gamma^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu \\ &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma (-\gamma)^{1/2} \delta\gamma^{ab} [\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu] \\ &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma (-\gamma)^{1/2} \delta\gamma^{ab} [h_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die constraint bepaalt dus de geldigheid van de Polyakovactie. De Polyakovactie is de basis van snaartheorie. Men definieert de (tweedimensionale) energie-momentum-tensor (EM-tensor) als volgt

---

<sup>4</sup>Deze metriek leeft enkel en alleen op het wereldblad.



$$T_{ab} = -2\pi(-\gamma)^{-1/2} \frac{\delta S_P}{\delta \gamma^{ab}} = h_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd} \quad (1.9)$$

De invariantie van de actie onder diffeomorfisme uit zich dus in het nul zijn van de EM-tensor. Deze actie is het startpunt van de snaartheorie. De volgende stap is het bepalen van de bewegingsvergelijkingen van de bosonische<sup>5</sup> snaar.

### 1.1.2 Bewegingsvergelijking

De bewegingsvergelijkingen van de snaar volgen rechtstreeks uit het extremeren van de Polyakovactie 1.6. Echter, het blijkt nuttig om deze actie eerst te herschrijven als

$$\begin{aligned} S_P &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \\ &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \partial_a(\dots) + \frac{T}{2} \int d^2\sigma X^\mu \partial_a((-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_b X_\mu) \\ &= -\frac{T}{2} \oint ds (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} X^\mu \partial_b X_\mu + \frac{T}{2} \int d^2\sigma X^\mu (-\gamma)^{1/2} D^a D_a X_\mu \end{aligned} \quad (1.10)$$

De variatie van de eerste term zal aanleiding geven tot de randvoorwaarden van de snaar, terwijl de tweede term aanleiding zal geven tot de bewegingsvergelijkingen zelf. We zullen deze apart bespreken.

#### Randvoorwaarden

De variatie van de eerste term leidt tot de contourintegraal

$$\oint ds (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_b X_\mu \delta X^\mu = 0 \quad (1.11)$$

Waarbij voorfactoren weggelaten zijn om de notatie te verlichten. Uiteraard verdwijnt de variatie op oneindig, zodat de contourintegraal zich herleidt tot:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_\sigma X_\mu \delta X^\mu \right]_{\sigma=0}^{\sigma=l} = 0 \quad (1.12)$$

Er zijn verschillende mogelijkheden om hieraan te voldoen. In het geval van de gesloten snaar<sup>6</sup> is hieraan voldaan, want dan gelden volgende voorwaarden:

<sup>5</sup>De fermionische vrijheidsgraden komen pas bij de supersnaar aan bod.

<sup>6</sup>Doorgaans wordt voor de gesloten snaar de keuze  $l = 2\pi$  gemaakt.

$$\begin{aligned}
X_\mu(\tau, 0) &= X_\mu(\tau, 2\pi) \\
\partial_\sigma X_\mu(\tau, 0) &= \partial_\sigma X_\mu(\tau, 2\pi) \\
\gamma^{ab}(\tau, 0) &= \gamma^{ab}(\tau, 2\pi)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

In het geval van de open snaar<sup>7</sup>, moeten de eindpunten aan bepaalde constraints voldoen. Vrije eindpunten zullen kunnen voldoen aan de zogenaamde *Neumann-randvoorwaarden*

$$\partial_\sigma X_\mu(\tau, 0) = \partial_\sigma X_\mu(\tau, \pi) = 0 \tag{1.14}$$

Maar er kan ook geopteerd worden voor zogenaamde *Dirichlet-randvoorwaarden*:

$$\begin{aligned}
\partial_\tau X^\mu(\tau, 0) &= \partial_\tau X^\mu(\tau, \pi) = 0 \\
&\Downarrow \\
\delta X^\mu(\tau, 0) &= \delta X^\mu(\tau, \pi) = 0
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Deze twee keuzes die men kan maken voor de open snaar hebben verregaande gevolgen. De Dirichlet randvoorwaarden geven aanleiding tot het vastzetten van de eindpunten op (hyper)oppervlakken in de targetruimte, objecten die bekend staan onder de naam *D-branen*<sup>8</sup>. In de afleiding van de bewegingsvergelijking voor een simpele snaar zit dus al de kiem voor de ganse wereld van *D-branen*. Indien men een snaartheorie definieert, krijgt men branen er onvermijdelijk bij.

## Bewegingsvergelijking

De bewegingsvergelijking valt eenvoudig af te lezen uit 1.10, en luidt:

$$D_a D^a X^\mu = 0 \tag{1.16}$$

Men kan echter de symmetrieën uitbuiten, en de geïnduceerde metriek lokaal gelijkstellen aan de Minkowski-metriek<sup>9</sup>, wat ons toelaat om de bewegingsvergelijking te herschrijven

$$\partial_a \partial^a X^\mu = 0 \Leftrightarrow (\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2) X^\mu = 0 \tag{1.17}$$

Een kleine herparametrisatie

<sup>7</sup>Doorgaans wordt voor de open snaar de keuze  $l = \pi$  gemaakt.

<sup>8</sup>De  $D$  in *D-braan* staat effectief voor Dirichlet.

<sup>9</sup>Voor details hieromtrent, cf. [2] [3] [1]

$$\sigma^\pm = \sigma \pm \tau \quad (1.18)$$

laat toe om de bewegingsvergelijkingen in volgende vorm te gieten:

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0 \quad (1.19)$$

Hieruit kunnen we besluiten dat de oplossing uit twee delen zal bestaan

$$X^\mu = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-) \quad (1.20)$$

De snaar beschikt dus over linkslopende en rechtslopende oscillaties. Een algemene oplossing is dan een fourierontwikkeling, voorafgegaan door de beweging van het massamiddelpunt van de snaar. Dit noemt men de *modusontwikkeling* van de snaar. In het geval van de open snaar verkrijgt men

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\sigma^+) &= \frac{x^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^\mu \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+} \\ X_R^\mu(\sigma^-) &= \frac{x^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^\mu \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Men kan snel verifiëren dat deze bewegingsvergelijkingen inderdaad voldoen aan de Neumannrandvoorwaarden 1.14.

### 1.1.3 Constraints en Virasoro-operators

De bewegingsvergelijkingen 1.21 zijn echter maar een deel van het verhaal. De snaar moet immers ook nog voldoen aan de constraints 1.8 die opgelegd werden aan de Polyakovactie om de equivalentie met de Nambu-Goto actie te garanderen. Met andere woorden, de EM-tensor moet nul blijven.

$$T_{ab} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X = 0 \\ \frac{1}{2}((\partial_\tau X)^2 + (\partial_\sigma X)^2) = 0 \end{cases}$$

Als dit ook wordt uitgeschreven in de nieuwe coördinaten  $\sigma^\pm$ , dan vindt men:

$$\begin{aligned}
T_{++} &= -\frac{1}{\alpha'} \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu = 0 \\
T_{--} &= -\frac{1}{\alpha'} \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu = 0 \\
T_{+-} &= T_{-+} = 0
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Een kleine uitwerking leert:

$$\begin{aligned}
\partial_- X^\mu &= \partial_- X_R^\mu(\sigma^-) \\
&= \frac{\alpha'}{2} p^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \\
&= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Waarbij dan  $\alpha_0^\mu$  gedefinieerd werd als

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \tag{1.24}$$

De volledige constraint uitrekenen geeft dan

$$\begin{aligned}
(\partial_- X^\mu)^2 &= \frac{\alpha}{2} \sum_{n,p} \alpha_n^\mu \alpha_p^\mu e^{-i(n+p)\sigma^-} \\
&= \frac{\alpha}{2} \sum_{n,m} \alpha_n^\mu \alpha_{m-n}^\mu e^{-im\sigma^-} \\
&= \alpha \sum_m L_m e^{-im\sigma^-}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Waarbij dan de *Virasoro-operator* als volgt gedefinieerd wordt:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_n \alpha_n^\mu \alpha_{m-n}^\mu \tag{1.26}$$

En de uitwerking voor het  $\sigma^+$ -deel verloopt volledig analoog. De constraints waaraan de snaar moet voldoen krijgen dan volgende, eenvoudige vorm

$$L_m = \tilde{L}_m = 0 \tag{1.27}$$

### 1.1.4 Spectrum van de snaar

Al het voorgaande speelt zich nog af op het klassieke niveau. De overstap naar de kwantumwereld gebeurt door het poneren van commutatierelaties. Deze worden hier zonder bewijs gegeven.

#### Covariante kwantisatie

$$\begin{aligned}
 [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \\
 [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] &= m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \\
 [x^\mu, p^\nu] &= i\eta^{\mu\nu} \\
 [\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] &= 0
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

En alle andere commutatoren worden nul gesteld. Een belangrijke commutator is

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_{\mu n}] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = m\delta_{m+n}\delta_\mu^\mu = m\delta_{m+n}D \tag{1.29}$$

Waarin de dimensie  $D$  van de targetruimte in kwestie opduikt. Verder dient  $X^\mu$  hermitisch te zijn, dit impliceert

$$\begin{aligned}
 \alpha_m^{\mu\dagger} &= \alpha_{-m}^\mu \\
 \Downarrow \\
 [\alpha_m^\mu, \alpha_{-m}^\nu] &= [\alpha_m^\mu, \alpha_m^{\nu\dagger}] = m\eta^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Dit stelt ons in staat om  $\alpha_{-m}$  en  $\alpha_m$  op een nieuwe manier te interpreteren

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha_{-m}}{\sqrt{m}} &\text{ als creatie-operator} \\
 \frac{\alpha_m}{\sqrt{m}} &\text{ als annihilatie-operator}
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

De snaar kan dus geïnterpreteerd worden als een oneindige verzameling oscillatoren, waarbij de  $\alpha$ 's fungeren als creatie en annihilatie-operatoren. Er is nog een andere vrijheidsgraad verbonden aan een willekeurige snaartoestand, namelijk het momentum van het massamiddelpunt,  $k^\mu$ . Een snaartoestand in de meest algemene vorm ziet er dan uit als

$$|\lambda\rangle = \prod_{\mu=0}^{D-1} \prod_{m>0}^{\infty} (\alpha_{-m}^\mu)^{f(\mu,m)} |0; k\rangle \tag{1.32}$$

Waarbij de exponent  $f(\mu, m)$  een positief geheel getal is, dat het excitatieniveau van oscillator  $m$  aangeeft.

### Spectrum open snaar

Niet alle snaartoestanden zijn fysische toestanden. Fysische toestanden  $|\phi\rangle$  voldoen aan de zogenaamde *Virasoro-constraints*

$$(L_0 - a)|\phi\rangle = 0 \quad ; \quad L_m|\phi\rangle = 0 \quad m > 0 \quad (1.33)$$

Waarbij de  $L_m$  “normaal geordende” operatoren zijn, de annihilatoren staan rechts van de creatoren. Bij alle  $L_m$  behalve  $L_0$  is dit triviaal, gezien ze toch commuteren. De ongeordende versie van  $L_0$  is

$$L_0^* = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_1^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n + \frac{D}{2} \sum_1^{\infty} n \quad (1.34)$$

Het geordende deel definieert men dan als

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_1^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n \\ &= -\alpha' M^2 + N \end{aligned} \quad (1.35)$$

Met  $N$  de getaloperator, die de som van modusindices als eigenwaarde heeft:

$$N|\phi\rangle = n|\phi\rangle \quad (1.36)$$

Nu kan het spectrum van de open snaar onderzocht worden. Ten eerste, de tachyontoestand

$$|\phi\rangle = |0; k\rangle$$

De eerste Virasoroconstraint  $(L_0 - a)|\phi\rangle = 0$  uitwerken geeft

$$\begin{aligned} -\alpha' M^2 + N - a|\phi\rangle &= -\alpha' M^2 + 0 - a|\phi\rangle \\ &= 0 \\ &\Downarrow \\ M^2 &= -\frac{a}{\alpha'} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Het tachyon is dus een toestand met negatieve massa<sup>10</sup>. Tachyonen zijn geen fysische toestanden. De volgende toestand is de toestand met 1 aangeslagen oscillator

$$|\phi\rangle = |1; k\rangle = \zeta \cdot \alpha_{-1}|0; k\rangle \quad (1.38)$$

met  $\zeta$  een polarisatievector. De eerste Virasoroconstraint geeft ons wederom een uitdrukking voor de massa

$$\begin{aligned} (L_0 - a)|\phi\rangle &= -\alpha' M^2 + 1 - a|\phi\rangle = 0 \\ \Downarrow \\ M^2 &= \frac{1 - a}{\alpha'} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Waarbij  $\zeta$  de polarisatievector is. De volgende Virasoroconstraint  $L_1|\phi\rangle = 0$  legt een voorwaarde op aan de polarisatie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_1^\rho \alpha_{0\rho} + \alpha_0^\rho \alpha_{1\rho})|1; k\rangle &= \alpha_0^\rho \alpha_{1\rho} \zeta_\mu \alpha_{-1}^\mu |0; k\rangle \\ &= \alpha_0^\mu \zeta_\mu |0; k\rangle = k^\mu \zeta_\mu |0; k\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

Er is dus sprake van transversale polarisatie,  $k^\mu \zeta_\mu = 0$ . De parameter  $a$  is in eerste instantie een vrije parameter in de theorie, maar de keuze  $a = 1$  ligt voor de hand om van deze toestand een massaloze toestand te maken. Die keuze is trouwens onvermijdelijk, gezien de transversale polarisatie de mogelijkheid voor een massieve toestand elimineert.

### Spectrum gesloten snaar

De Virasoro-constraints worden nu verdubbeld, gezien er zowel rechts-en linkslopende modes aanwezig zijn

$$\begin{aligned} (L_0 - 1)|\phi\rangle &= 0 \quad ; \quad L_m|\phi\rangle = 0 \quad m > 0 \\ (\tilde{L}_0 - 1)|\phi\rangle &= 0 \quad ; \quad \tilde{L}_m|\phi\rangle = 0 \quad m > 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Combinatie van de constraints van beide sectoren geeft aanleiding tot nieuwe betrekkingen

$$\begin{aligned} (L_0 - \tilde{L}_0)|\phi\rangle &= 0 \\ (L_0 + \tilde{L}_0 - 2)|\phi\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

---

<sup>10</sup>We veronderstellen  $a \geq 0$

Het normaal geordende deel van  $L_0$  is hier:

$$\begin{aligned}
L_0 &= \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_1^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n \\
&= \frac{1}{4}\alpha' p_\mu p^\mu + N \\
&= -\frac{1}{4}\alpha' M^2 + N
\end{aligned} \tag{1.43}$$

En analoog voor  $\tilde{L}_0$

$$\tilde{L}_0 = -\frac{1}{4}\alpha' M^2 + \tilde{N} \tag{1.44}$$

De eerste combinatie van de constraints 1.42 geeft ons dan

$$L_0 - \tilde{L}_0|\phi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (N - \tilde{N})|\phi\rangle = 0 \tag{1.45}$$

Dit staat bekend onder de naam *level-matching*. De modusindex van de linkslopende en rechtslopende oscillaties dient gelijk te zijn in een gesloten snaar.

Uit de tweede gecombineerde constraint in 1.42 kan men de massaformule voor de gesloten snaar afleiden

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha'}{2}M^2 + N + \tilde{N} - 2|\phi\rangle &= 0 \\
\Downarrow \\
M^2 &= \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2)
\end{aligned} \tag{1.46}$$

De tachyontoestand wordt gekenmerkt door  $N = \tilde{N} = 0$  en bijgevolg geldt voor de massa van het tachyon

$$M^2 = -\frac{4}{\alpha'} \tag{1.47}$$

Wat in retrospect dan ook de naam tachyontoestand verantwoordt. De volgende toestand is de toestand met de eerste oscillator aangeslagen. Level-matching vereist dat dit zowel in de linkslopende als in de rechtslopende sector gebeurt, dus  $N = \tilde{N} = 1$ . De massa van deze toestand is dan



$$M^2 = \frac{2(2-2)}{\alpha'} = 0 \quad (1.48)$$

Hier hebben we dus te maken met een massaloze toestand. Volledig uitgeschreven ziet deze er zo uit

$$|\phi\rangle = \zeta_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0; k\rangle \quad (1.49)$$

waarbij  $\zeta_{\mu\nu}$  een tensor is. Het symmetrische deel geeft het graviton  $g_{\mu\nu}$ , het asymmetrische deel geeft  $B_{\mu\nu}$  (in veldentheorie is deze toestand verantwoordelijk voor het *Kalb-Ramondveld*) en tot slot geeft het scalair deel het dilaton  $\Phi$ . Al de andere toestanden zullen massief worden, en vallen buiten onze interesse.

### 1.1.5 De dimensionaliteit van de targetruimte

Tot hertoe hebben we vermeld dat snaartheorie een theorie is in de  $D$  dimensionale targetruimte, zonder hier meer precies over te zijn. In deze subsectie geven we kort een eerste manier om de dimensionaliteit van de targetruimte vast te leggen<sup>11</sup>. Een eerste stap hierin is de introductie van een nieuw coördinatenstelsel in de targetruimte.

$$\begin{aligned} X^\pm &= X^0 \pm X^{D-1} \\ X^I &= X^1 \dots X^{D-2} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Waarbij  $X^I$  de transversale coördinaten zijn. Deze keuze van coördinaten staat bekend onder de naam lichtkegelijk (*lightcone gauge*). Het blijkt dat de Virasoro-operator 1.35 (net zoals vele andere operatoren die bekomen werden in de covariante kwantisatie) een analogon heeft in de lichtkegelijk, typisch hierbij is dat enkel het transversale deel hierin voorkomt

$$\begin{aligned} L_0^\perp &= \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I \\ &= \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I}_{\text{normaal geordend}} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^I \alpha_{-m}^I \end{aligned} \quad (1.51)$$

De laatste term kan herschreven worden

---

<sup>11</sup>In deze subsectie volgen we de manier waarop [4] tot de ordeningsconstante komt.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^I \alpha_{-m}^I &= \frac{1}{2} \sum \left( \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + [\alpha_m^I, \alpha_{-m}^I] \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m \eta_I I \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + (D-2) \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + (D-2) \left( \frac{-1}{24} \right)
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Hier werd gebruik gemaakt van  $\sum_{m=1}^{\infty} m = -1/12$ , en ook werd het analogon van commutatierelatie 1.29, met enkel transversale  $\alpha$ -operatoren toegepast. Dit geeft uiteindelijk voor de transversale Virasoro-operator

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \alpha_m - \frac{D-2}{24} \tag{1.53}$$

De term  $\frac{D-2}{24}$  neemt hier de functie over van de parameter  $a$  in 1.33. Uiteindelijk stellen we  $a = 1$ , wat ons dan vertelt dat  $D - 2 = 24$ . Het aantal dimensies van de targetruimte dient dus  $D = 26$  te zijn om de consistentie te bewaren. Verder zien we hier ook nog dat elke bosonische vrijheidsgraad  $a_b = -1/24$  bijdraagt aan deze constante term. Die  $a_b$  wordt soms ook nog wel een “ordeningsconstante” genoemd. Het concept van een ordeningsconstante zal later nog belangrijk blijken indien men inzicht wil krijgen in de vacuümenergie van de snaar. Intuïtief kunnen we dit al inzien, de ordeningsconstante is een term die steeds aanwezig zal zijn in de massa-operator, of de snaar zich nu in een geëxciteerde toestand bevindt of niet is hierbij niet van belang.

### 1.1.6 CFT

Een belangrijke eigenschap van snaartheorie is dat snaartheorie in wezen een conforme veldentheorie<sup>12</sup> is. Conforme veldentheorieën in twee dimensies laten zich best beschrijven in complexe coördinaten, dus wordt de Polyakovactie herschreven met complexe parameters.

#### Complexe parameters

We gaan van start door over te gaan naar het *Euclidisch formalisme*. Dit komt erop neer dat de gewone (“Minkowski”) actie ook geldt in imaginaire “tijd”  $i\tau$ . Concreet komt dit neer op een substitutie  $\sigma^2 = i\sigma^0$ , de Euclidische actie wordt dan als volgt gedefinieerd

<sup>12</sup>Ook bekend onder de naam *conformal field theory*, vaak afgekort als CFT. Voor een mooie introductie cf. [5].

$$S_E \equiv -iS_M(\sigma^0 \rightarrow i\sigma^2) \quad (1.54)$$

Vergelijking 1.6 is de gewone Polyakovactie. In het Euclidisch formalisme neemt deze de volgende vorm aan<sup>13</sup>

$$S_{EUC} = \frac{T}{2} \int d\sigma^1 d\sigma^2 (\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + \partial_2 X^\mu \partial_2 X_\mu) \quad (1.55)$$

Een volgende stap is de overgang naar de volgende coördinaten

$$\begin{aligned} z &= \sigma^1 + i\sigma^2 \\ \bar{z} &= \sigma^1 - i\sigma^2 \end{aligned} \quad (1.56)$$

Welke, op een factor  $i$  na, compleet analoog is aan de overgang 1.18. De actie wordt in dit geval

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dz d\bar{z} \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X_\mu \quad (1.57)$$

Dit is de actie van de snaartheorie, nu uitgeschreven in complexe parameters. Gewapend met deze actie, richten we ons nu naar de studie van conformele transformaties.

### Conformele transformaties

Een conformele transformatie is een transformatie van de metriek met volgende vorm

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (1.58)$$

Dit is dus een eigenlijke herschaling van de metriek. Een conformele transformatie wijzigt nooit vormen maar kan wel de afstanden wijzigen. Een conformele theorie is een theorie die invariant is onder zo'n transformaties. Een dergelijke theorie moet dus noodzakelijkerwijs schaalinvariant zijn.

Nemen we een algemene, conformele transformatie,

---

<sup>13</sup>Hier is stilzwijgend overgegaan op een vlakke metriek  $\gamma^{ab} = \eta^{ab}$ , die vervolgens in het Euclidisch formalisme gewoon  $\delta^{ab}$  wordt. Dit is lokaal altijd mogelijk.

$$\begin{aligned}
z' &= z + \epsilon(z, \bar{z}) \\
\bar{z}' &= \bar{z} + \bar{\epsilon}(z, \bar{z})
\end{aligned}
\tag{1.59}$$

men kan verifiëren [1] dat ze in twee dimensies aan volgende eigenschap voldoen

$$\begin{aligned}
z' &= z + \epsilon(z) = f(z) \\
\bar{z}' &= \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = f(\bar{z})
\end{aligned}
\tag{1.60}$$

Indien we de actie 1.57 onderwerpen aan zo'n transformatie, dan krijgen we

$$\begin{aligned}
S' &= T \int dz' d\bar{z}' \left( \frac{dz}{dz'} \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial z'} \frac{dz'}{dz} \frac{\partial X^\mu}{\partial \bar{z}'} \frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \\
&= \int dz' d\bar{z}' \partial_{z'} X^\mu \partial_{\bar{z}'} X_\mu
\end{aligned}
\tag{1.61}$$

Deze actie is dus invariant voor een conforme transformatie. Hiermee is aangetoond dat de snaartheorie wel degelijk een CFT is.

## 1.2 Supersnaren

### 1.2.1 Bewegingsvergelijking en randvoorwaarden

De snaar die tot dusver besproken werd, bestaat enkel uit bosonische vrijheidsgraden. Om een realistische theorie te kunnen zijn, is er nood aan fermionische vrijheidsgraden. De bosonische snaar  $X^\mu$  wordt aangevuld met fermionische vrijheidsgraden  $\psi^\mu$ . De volledige snaar ziet er dan zo uit

$$(X^\mu, \psi^\mu) = \left( X_L^m u(\sigma^+) + X_R^m u(\sigma^-), \begin{matrix} \psi_-^\mu(\sigma^-) \\ \psi_+^\mu(\sigma^+) \end{matrix} \right)
\tag{1.62}$$

De actie wordt eveneens uitgebreid met een fermionisch deel

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int \partial_a X^\mu \partial^\mu X_\mu - i \bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu
\tag{1.63}$$

We spitsen ons nu toe op het fermionische deel (de bespreking van het bosonische deel wijzigt niet tegenover vroeger). We schrijven deze actie expliciet uit in de verschillende spinorcomponenten

$$S_F = \frac{i}{2\pi} \int \bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu = \frac{i}{\pi} \int \psi_A \partial_+ \psi_A + \psi_B \partial_- \psi_B \quad (1.64)$$

De Euler-Lagrangevergelijking leert ons dan<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \partial_+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ \psi_A)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} \\ -\partial_+ \psi_A &= \partial_+ \psi_A \\ \partial_+ \psi_A &= 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

Dit vertelt ons dat  $\psi_A(\sigma^+, \sigma^-)$  niet afhangt van  $\sigma^+$ . De redenering voor  $\psi_B$  verloopt op dezelfde manier. Dit laat ons toe om  $\psi_A$  en  $\psi_B$  te hernoemen op basis van hun afhankelijkheid.

$$\begin{aligned} \partial_+ \psi_A = 0 &\Rightarrow \psi_A = \psi_- \\ \partial_- \psi_B = 0 &\Rightarrow \psi_B = \psi_+ \end{aligned} \quad (1.66)$$

Dit substitueren in 1.64 geeft ons

$$S_F \sim \int d^2\sigma \psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+ \quad (1.67)$$

Om op zoek te gaan naar de randvoorwaarden, schrijven we net zoals in het bosonische geval de variatie volledig uit. Een deel van de variatie zal aanleiding geven tot de bewegingsvergelijkingen 1.65, een ander deel zal verantwoordelijk zijn voor de randvoorwaarden. Het is in deze randvoorwaarden waarin we nu geïnteresseerd zijn

$$\begin{aligned} \delta S &\sim \int d^2\sigma \delta\psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_- \partial_+(\delta\psi_-) + (-\leftrightarrow+) \\ &\sim \int d^2\sigma \partial_+(\psi_- \delta\psi_-) - \int d^2\sigma \partial_+ \psi_- \delta\psi_- + \int d^2\sigma \delta\psi_- \partial_+ \psi_- + (-\leftrightarrow+) \\ &\sim \int d^2\sigma \partial_+(\psi_- \delta\psi_-) + 2 \int d^2\sigma \delta\psi_- \partial_+ \psi_- + (-\leftrightarrow+) \\ &\sim - \int d\tau \psi_- \delta\psi_- \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l} + \int d\tau \psi_+ \delta\psi_+ \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l} + \dots \end{aligned} \quad (1.68)$$

Waarbij in de laatste regel het deel van de variatie dat aanleiding geeft tot de bewegingsvergelijkingen is weggelaten. Om de randvoorwaarden duidelijk te zien, herschrijven we de variatie nog een laatste maal

<sup>14</sup>Merk op dat we hier met anticommuterende variabelen te maken hebben.

$$\delta S_F \sim \int d\tau \left( (\psi_+ \delta\psi_+ - \psi_- \delta\psi_-) \Big|_{\sigma=l} - (\psi_+ \delta\psi_+ - \psi_- \delta\psi_-) \Big|_{\sigma=0} \right) \quad (1.69)$$

In het geval van open snaren moet hieraan voldaan zijn aan beide uiteinden van de snaar (vandaar dat we  $\sigma = l$  en  $\sigma = 0$  afzonderlijk noteren), anders zal de variatie onmogelijk 0 kunnen worden. Uit 1.69 blijkt dat  $\psi_- = \pm\psi_+$  op beide uiteinden van de snaar. Conventioneel wordt de keuze gemaakt van ze op  $\sigma = 0$  gelijk te stellen (enkel het relatieve teken tussen de beide randvoorwaarden is immers fysisch relevant). De randvoorwaarden worden zo

$$\begin{array}{ll} \psi_+(\tau, 0) = \psi_-(\tau, 0) & \text{en} \quad \psi_+(\tau, l) = \psi_-(\tau, l) & \text{Ramond sector} \\ \psi_+(\tau, 0) = \psi_-(\tau, 0) & \text{en} \quad \psi_+(\tau, l) = -\psi_-(\tau, l) & \text{Neveu-Schwarz sector} \end{array}$$

### 1.2.2 Bespreking sectoren

Gezien we twee keuzes hebben voor de randvoorwaarden, moeten we verschillende sectoren [1] apart bespreken. In het geval van de gesloten snaar zijn er vier verschillende sectoren aanwezig, gezien links- en rechtslopende golven onafhankelijk van elkaar beschouwd kunnen worden.

- De NS-NS sector: In dit geval is het massalooze spectrum gelijk aan dat van de bosonische theorie, we vinden een scalair dilaton  $\Phi$ , een antisymmetrisch Kalb-Ramondveld  $B_{\mu\nu}$  en een symmetrisch graviton  $g_{\mu\nu}$
- De NS-R sector: In het spectrum vinden we het gravitino en het dilatino, de fermionische partners van het graviton en dilaton.
- De R-NS sector: Identiek aan de NS-R sector
- R-R sector: In deze sector vinden we terug bosonische velden, maar staan we nogmaals voor een keuze. Afhankelijk van de *GSO-projectie*<sup>15</sup> die men kiest voor de linkslopende en rechtslopende golf verandert de inhoud van de theorie. Enkel het relatieve teken tussen de twee is fysisch relevant, dus blijven we achter met twee keuzemogelijkheden.
  - In type IIA snaartheorie (de niet-chirale theorie) geldt  $p = 2n$  en vinden we Ramond-Ramond velden [2]  $C^{(p-1)} = C^{(1)}, C^{(3)}$
  - In type IIB snaartheorie (de chirale theorie) geldt  $p = 2n + 1$  en vinden we Ramond-Ramond velden [2]  $C^{(p-1)} = C^{(0)}, C^{(2)}, C^{(4)}$

---

<sup>15</sup>Voor een inleiding, cf. [1] [3], voor meer details cf. de standaardwerken [6] [7]

## 1.3 Branen

### 1.3.1 Open snaar tussen twee branen

#### Configuratie en modusontwikkeling

Een interessante situatie die ons onmiddellijk inzicht zal geven in de invloed van branen, is de configuratie van een open snaar die zich bevindt tussen  $D$ -branen. We beschouwen in deze inleiding het eenvoudigste geval, namelijk een open snaar tussen twee evenwijdige  $Dp$ -branen.

De configuratie wordt bepaald door twee parameters, namelijk de braan<sup>16</sup> waarop een eindpunt van de snaar ligt. We hebben dus vier mogelijkheden of “sectoren”.

$$[1, 1], [1, 2], [2, 1] \text{ en } [2, 2] \quad (1.70)$$

Wij zullen ons toespitsen op de  $[1, 2]$  sector. De bespreking van andere sectoren volgt onmiddellijk uit analogie. De transversale snaarcoördinaten  $X^a$  moeten voldoen aan randvoorwaarden

$$X_{\sigma=0}^a = x_1^a \quad \text{en} \quad X_{\sigma=\pi}^a = x_2^a \quad (1.71)$$

De modusontwikkeling voor deze transversale coördinaten wordt dan

$$X^a(\tau, \sigma) = x_1^a + \frac{\sigma}{\pi}(x_2^a - x_1^a) + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\sigma} \sin n\sigma \quad (1.72)$$

De eerste twee termen zorgen ervoor dat aan de randvoorwaarden voldaan wordt. Voorts is  $\sin n\sigma$  factor ook nog typisch voor Dirac-randvoorwaarden, die de snaar vasthechten aan het hyperoppervlak, de  $Dp$ -braan.

#### Spectrumanalyse

We maken gebruik van de massaformule

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} \left( \frac{1}{2} \alpha_0^m \alpha_0^m + \frac{1}{2} \alpha_0^a \alpha_0^a + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_{-n}^m \alpha_n^m + \alpha_{-n}^a \alpha_n^a) \right) \quad (1.73)$$

Waarbij we  $\alpha_0^a$  definieerden als

$$\alpha_0^a = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}\pi} (x_2^a - x_1^a) \quad (1.74)$$

---

<sup>16</sup>Het woord braan is trouwens afkomstig van “membraan” en is het algemenere begrip. Een membraan is doorgaans tweedimensionaal, een braan kan eender welke dimensie zijn.

Voor het massaspectrum vinden we zo

$$M^2 = \left( \frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1) \quad (1.75)$$

We merken op dat er een bijdrage aanwezig is ten gevolge van de separatie tussen de twee branen. Samenvallende branen zullen dus voor massaloze toestanden zorgen. De vier sectoren blijven echter bestaan, dus we bekommen in totaal vier massaloze ijkvelden [1]. Indien er  $N$  branen samenvallen, hebben we te maken met  $N^2$  sectoren en logischerwijze evenveel massaloze ijkvelden. Die ijkvelden leven in het wereldvolume van de samenvallende branen en zullen bovendien interageren. De eindpunten van de snaren kunnen zich verbinden, of een enkele snaar kan zich opsplitsen. Op deze manier ontstaat een  $U(N)$  Yang-Mills theorie die leeft op het wereldvolume van de branen.

### 1.3.2 DBI-actie en Yang-Millstheorie

#### De DBI-actie

De *Dirac-Born-Infeld* actie, oftewel de DBI-actie voor een  $Dp$ -braan is gedefinieerd [1] [2] als volgt

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{-\det(G_{mn} + B_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn})} \quad (1.76)$$

waarbij  $T_p$  de spanning van een  $Dp$ -braan voorstelt. Men kan aantonen [7] dat hiervoor geldt

$$T_p = \frac{1}{(2\pi)^p (\alpha')^{\frac{p+1}{2}}} \quad (1.77)$$

wat voor  $p = 1$  trouwens reduceert tot de spanning van een gewone snaar. De coördinaten  $\xi^m$  met  $m = 0, \dots, p$  zijn coördinaten op het wereldvolume van de braan. We kiezen deze zo dat ze samenvallen met de tangentiële coördinaten  $X^m$ , deze keuze staat gekend onder de naam “statische ijk”. Voor de coördinaten van de targetruimte geldt nu

$$X^m = \xi^m \quad \& \quad X^a = X^a(\xi^m) \quad (1.78)$$

De velden  $G_{mn}, B_{mn}$  en  $F_{mn}$  zijn afkomstig van hun tegenhangers in de volledige ruimtetijd, maar in tegenstelling tot  $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}$  leven zij enkel en alleen op het wereldvolume van de braan. Indien we kijken naar het  $ds^2$ , op het wereldvolume van de braan<sup>17</sup>

<sup>17</sup>Dit is exact dezelfde procedure die we toepasten bij de Nambu-Goto actie bij het invoeren van de geïnduceerde metriek  $h_{\mu\nu}$ .



$$\begin{aligned}
ds^2 &= G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \\
&= G_{\mu\nu} \partial_m X^\mu d\xi^m \partial_n X^\nu d\xi^n
\end{aligned} \tag{1.79}$$

zien we dat geldt

$$G_{mn} = G_{\mu\nu} \partial_m X^\mu \partial_n X^\nu \tag{1.80}$$

De  $G_{mn}$  wordt ook wel de pull-back van  $G_{\mu\nu}$  genoemd. Indien we te maken hebben met een constant dilaton, kan de DBI-actie ook nog geschreven worden als

$$S_{DBI} = \frac{T_p}{g_s} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(G_{mn} + B_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn})} \tag{1.81}$$

Waarbij opvalt dat als  $B_{mn} = F_{mn} = \phi = 0$ , dan geldt dat de actie gerelateerd is aan het (hyper)volume van het wereldvolume  $S \sim \int \sqrt{G}$ , net zoals de Nambu-Goto actie gerelateerd is aan de oppervlakte van het wereldblad.

### Uitrekenen DBI-actie

Laat ons nu de DBI-actie nader bestuderen. We werken in een regime waarin geldt

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \\
B_{mn} &= 0 \\
e^\phi &= 1/g_s
\end{aligned} \tag{1.82}$$

In dat geval wordt de determinant in het integrandum

$$\det(G_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn} + \partial_m X^a \partial_n X_a) = \det(\eta_{ml}) \det(\delta_n^l + 2\pi\alpha' F_n^l + \partial_n X^a \partial^l X_a) \tag{1.83}$$

Indien we dan gebruik maken van de betrekking

$$\begin{aligned}
\det(1 + B) &= \exp\left(\text{Tr}[\ln(1 + B)]\right) \\
&= \exp\left(\text{Tr}(B - B^2/2)\right)
\end{aligned} \tag{1.84}$$

vinden we

$$\begin{aligned}
\det(\eta_{ml}) \exp \left( \partial_n X^a \partial^n X_a + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2} F_{mn} F^{mn} \right) &= -1 \left( 1 + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2} F_{mn} F^{mn} + \partial_n X^a \partial^n X_a \right) \\
&\Downarrow \\
\sqrt{-\det(\dots)} &= 1 + \frac{(2\pi\alpha')^2}{4} F_{mn} F^{mn} + \frac{1}{2} \partial_n X^a \partial^n X_a
\end{aligned} \tag{1.85}$$

Dit geeft dan uiteindelijk voor de actie

$$S_P = \frac{T_p (2\pi\alpha')^2}{4g_s} \int d^{p+1} \xi \left( F_{mn} F^{mn} + \frac{2}{(2\pi\alpha')^2} \partial_m X^a \partial^m X_a \right) - \frac{T_p}{g_s} V_{p+1} \tag{1.86}$$

### Yang-Mills

Een tiendimensionale ( $U(1)$ ) Yang-Mills actie [1] ziet er als volgt uit

$$S_{YM} = -\frac{1}{4g_{YM}} \int d^{10} x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{1.87}$$

De componenten  $A_\mu(X)$  hangt enkel af van de braancoördinaten  $\xi^m$

$$\begin{aligned}
A_\mu(X) &= A_\mu(\xi^m) \\
A_m(\xi^m) \quad \text{en} \quad A_a &= \frac{1}{2\pi\alpha'} X^a(\xi^m)
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Dit geeft dan voor  $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= F_{mn} F^{mn} + F_{ma} F^{ma} + F_{am} F^{am} + F_{aa} F^{aa} \\
&= F_{mn} F^{mn} + \frac{2}{(2\pi\alpha')^2} \partial_m X^a \partial^m X_a
\end{aligned} \tag{1.89}$$

En hieruit volgt dan onmiddellijk  $S_{YM} = S_P$ . Deze redenering kan veralgemeend worden [1], de DBI-actie van  $N$  samenvallende  $Dp$ -branen zal aanleiding geven tot een  $U(N)$  Yang-Mills theorie, gereduceerd tot  $p+1$  dimensies.

## Hoofdstuk 2

# $p$ -Branen en zwarte gaten in supergravitatie

In dit en het volgende hoofdstuk leggen we ons toe op de studie van het vijfdimensionale Reissner-Nordström zwart gat, meer bepaald op het construeren van een model dat dit zwart gat modelleert in snaartheorie. Gedurende deze twee hoofdstukken volgen we grofweg de structuur van [9], andere interessante reviews over het onderwerp zijn [13] [24] [25] [29] [23] [33] [34].

### 2.1 $p$ -Branen in supergravitatie

In wezen heeft supergravitatie (vaak afgekort als *sugra*) niets te maken met snaren. Het is een gravitatietheorie die tevens gebruik maakt van supersymmetrie, en is dus een uitbreiding van algemene relativiteit. Toch is supergravitatie een onmisbare stap naar een beschrijving van het vijfdimensionale zwart gat in snaartheorie. Dit om twee redenen.

Ten eerste omdat supersnaartheorie en supergravitatie in de lage energielimiet over een equivalente actie beschikken. Beide theorieën staan in nauw verband met elkaar, hoewel ze vertrekken vanuit een totaal verschillend uitgangspunt. Beiden geven op het einde van de rit (en in een bepaald regime) dus toch dezelfde fysica. Ten tweede omdat supergravitatie ook braanoplossingen bevat. Branen zullen de bouwstenen bij uitstek blijken om een zwart gat in snaartheorie te construeren.

We zullen ons dan ook in eerste instantie toespitsen op die braanoplossingen, met het oog op de studie van zwarte gaten. Via supergravitatie kunnen we rechtstreeks proberen een metriek te vinden van zo'n braanoplossing. Die branen zullen we vervolgens zo combineren dat ze een zwart gat vormen en tenslotte via de gekende *Bekenstein-Hawking area law* [8] de entropie berekenen van dat uiteindelijke zwart gat. Op dat punt gekomen, beschikken we dus over een zwart gat in supergravitatie, met gekende entropie.

Later kunnen we dit dan vergelijken met wat we vinden als we te werk gaan via de snaartheorie,

waar we een zwart gat zullen construeren met behulp van de daar aanwezige  $D$ -branen. Het vijfdimensionaal zwart gat in supergravitatie dient als houvast in een meer vertrouwde omgeving, de oppervlakte van het zwart gat kan daar immers rechtstreeks uit de metriek berekend worden. In snaartheorie gaan we langs de microscopische kant van de zaak een kijkje nemen en zullen we rechtstreeks de microtoestanden tellen.

Alles staat of valt natuurlijk met de equivalentie (in de lage energie limiet welteverstaan) tussen snaartheorie en sugra, dus daar gaan we eerst op in.

### 2.1.1 Effectieve actie

#### Gekromde ruimte als coherente toestand gravitonen

In de studie van zwarte gaten is het uitgangspunt een benaderende *effectieve actie*, in plaats van de Polyakovactie. In deze paragraaf gaan we even iets dieper in op deze constructie.

Een eerste insteek vinden we in de studie van snaartheorie op een gekromde achtergrond. Uit algemene relativiteit weten we dat een gekromde achtergrond equivalent is met de aanwezigheid van een gravitationeel veld. De snaartheorie formuleren op een gekromde achtergrond is echter niet voldoende, we herinneren ons uit de inleiding reeds het verschijnen van een gravitontoestand 1.49.

Die gravitontoestand is duidelijk al een manifestatie van de aanwezigheid van gravitatie in snaartheorie. Als we dan snaartheorie in een gekromde achtergrond gaan bestuderen, introduceren we eigenlijk nogmaals gravitatie. De zwaartekracht komt dus werkelijk langs twee deuren tegelijk de snaartheorie binnen. Enerzijds langs het verschijnen van een gravitontoestand in het massaspectrum van de snaar zelf, anderzijds langs kromming van de targetruimte. Zwaartekracht wordt tegelijk veroorzaakt door en beïnvloedt zelf de snaar. De vraag die we ons stellen is dus: hoe gaat dit precies in z'n werk, en blijft het intern consistent?

Laat ons beginnen met de Polyakovactie 1.6 neer te schrijven in een gekromde achtergrond

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) \quad (2.1)$$

waarbij  $G_{\mu\nu}$  de gekromde metriek is in de *targetruimte*. Als we deze nu schrijven als een expansie rond de vlakke ruimte  $\delta_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X) \quad (2.2)$$

Dan kan de padintegraal die opgebouwd wordt uit die actie

$$Z = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{Poly}-V} \quad (2.3)$$

vereenvoudigd worden tot

$$Z = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{Poly}(1 - V + \dots)} \quad (2.4)$$

De  $V$  kan hieruit worden afgelezen

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu h_{\mu\nu}(X) \quad (2.5)$$

Waar men dan de gravitonvertexoperator [2]

$$V_{grav} \sim \int d^2z : e^{ipX} \partial X \bar{\partial} X : \zeta_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

in herkent, mits men stelt dat de voor de afwijking van de vlakke metriek  $h_{\mu\nu}$  geldt

$$h_{\mu\nu} = \zeta_{\mu\nu} e^{ipX} \quad (2.7)$$

Zo zien we dat een gekromde targetruimte eigenlijk equivalent is met een coherente toestand van gravitonen. In dit specifieke geval vinden we uiteindelijk de vlakke golf oplossing 2.7, maar dit doet geen afbreuk aan de algemeenheid van de conclusie. Een willekeurige andere situatie kan immers geconstrueerd worden door een superpositie van vele vlakke golven.

Een mogelijke intuïtievare manier om in te zien wat er hier gebeurt, is de vergelijking maken met een elektromagnetisch veld. Een elektromagnetisch veld is immers te interpreteren als een coherente toestand van fotonen. Op dezelfde manier is de gekromde ruimtetijd (en dus het gravitatieveld) hier een coherente toestand van gravitonen.

Door de expansie en vervolgens analyse van de laagste orde term kon de bouwsteen, de gravitonvertexoperator, geïdentificeerd worden. Hier zien we op een zeer duidelijke manier de snaartheorie als een theorie van zwaartekracht naar voren komen. De onderlinge relatie tussen beiden is ook duidelijk, introductie van een gekromde ruimtetijd impliceert een coherente gravitontoestand, introductie van een gravitontoestand impliceert een kromming van de ruimte.

## $\beta$ -functies

Een interessante uitweiding nu we inzien dat zwaartekracht blijkbaar prominent aanwezig is in snaartheorie, is kijken of de eigenlijke Einsteinvergelijkingen in vacuüm ook ergens af te leiden zijn uit snaartheorie. Hier in detail op ingaan zou ons iets te ver leiden, maar een korte introductie van het concept  $\beta$ -functie geeft al een goed idee. In deze paragraaf volgen we [2] van nabij.

Een belangrijk punt in de analyse van snaartheorie is de geldigheid van bepaalde oplossingen vaststellen. Bij de kwantisatie van de snaartheorie hebben we immers geen garanties dat bepaalde ijkssymmetriën overleven, dus dat moet expliciet geverifieerd worden. Typisch zal een renormalisatieproces plaatsvinden, maar dat impliceert de introductie van een cut-off schaal. Die schaalafhankelijkheid zal opduiken in fysische grootheden, wat dan onvermijdelijk de conformele invariantie van de theorie zal schenden. In snaartheorie is de conformele invariantie echter een ijk-invariantie en moet dus behouden blijven, dus dient men de voorwaarden waaronder dit gebeurt te onderzoeken.

Om onze analyse te vereenvoudigen, bekijken we het specifieke geval van een snaar in een gekromde achtergrond met een metriek op het wereldblad geparаметriseerd als volgt

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

Indien men dan *dimensionale renormalisatie* toepast

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^{2+\epsilon}\sigma e^{\phi\epsilon} \partial X^\mu \partial X^\nu G_{\mu\nu}(X) \quad (2.9)$$

Deze extra exponentiële wordt niet gecompenseerd, in tegenstelling tot het reguliere deel. Als men dan verder de gerenormaliseerde metriek van de targetruimte als volgt neemt

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\epsilon} R_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

Dan wordt, bij  $\epsilon \rightarrow 0$ , de actie

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial X^\mu \partial X^\nu (G_{\mu\nu} + \alpha' \phi R_{\mu\nu}) \quad (2.11)$$

Waarbij nu duidelijk te zien is dat de Weyl-invariantie sowieso gebroken wordt. Het diagnostisch middel bij uitstek is het spoor van de energie-momentum tensor. Dit is immers 0 bij een Weyl-invariante theorie.

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} &= \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\alpha\beta}} \\
&= -2\pi \frac{\partial S}{\partial \phi} \delta_{\alpha\beta} \\
&\Downarrow \\
T_{\alpha}^{\alpha} &= -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} \partial X^{\mu} \partial X^{\nu} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Conventioneel wordt de zogenaamde  $\beta$ -functie dan aangeduid als de (dimensieloze) coëfficiënt voor de kinetische term.

$$\begin{aligned}
T_{\alpha}^{\alpha} &= -\frac{1}{2\alpha'} \beta_{\mu\nu} \partial X^{\mu} \partial X^{\nu} \\
\text{met } \beta_{\mu\nu} &= \alpha' R_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Het nul zijn van de  $\beta$ -functie geeft dan aan dat de theorie ook geldig is in het kwantummechanisch geval. Merk op dat we hier de Einsteinvergelijking in vacuüm vinden! Snaartheorie geeft dus werkelijk aanleiding tot de Einsteinvergelijkingen zoals gekend uit de relativiteitstheorie, enkel en alleen omdat de conforme invariantie bewaard dient te blijven.

### 2.1.2 Sugra actie

Nu we aangetoond hebben hoe het concept van een effectieve actie werkt, gaan we kijken wat dit betekent voor de volledige supersymmetrische snaartheorie in tien dimensies. Het blijkt dat de lage energie effectieve actie (soms ook *low energy effective action* genoemd) van tiendimensionale supersnaartheorie equivalent is aan de actie van tiendimensionale supergravitatie. De lage energie effectieve actie (de laagste ordes in de expansie houden) is nuttig, gezien snaartheorie een grote *mass-gap* heeft en we dus enkel geïnteresseerd zijn in de massaloze deeltjes.

Het bosonisch deel van deze (type IIA) supergravitatie-actie is [9] [10] [11]

**DEF 2.1.1.**

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{16\pi G_N^{10}} \int d^{10}x \sqrt{-G} [e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{3}H^2) - \alpha' G^2 - \\
&\quad \frac{\alpha'}{12} F'^2 - \frac{\alpha'}{288} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{10}} F_{\mu_1 \dots \mu_4} F_{\mu_5 \dots \mu_8} B_{\mu_9 \mu_{10}}]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Een kort overzichtje van de inhoud<sup>1</sup> van deze theorie, uit de (NS,NS) sector hebben we hier

- De metriek  $G_{\mu\nu}$

---

<sup>1</sup>Cf. subsectie 1.2.2

- Tweevorm  $B_{\mu\nu}$
- Het dilaton (een scalar)  $\phi$

Uit de (R,R) sector krijgen we volgende velden

- Eénvorm  $A_\mu$
- Drievorm  $C_{\mu\nu\rho}$

Tenslotte zien we nog de verschillende veldsterktes opduiken

- $G = dA$  oftewel  $G_{\mu\nu} = 2 \partial_{[\mu} A_{\nu]}$
- $H = dB$  oftewel  $H_{\mu\nu\rho} = 3 \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]}$
- $F = dC$  oftewel  $F_{\mu\nu\rho\sigma} = 4 \partial_{[\mu} C_{\nu\rho\sigma]}$
- $F' = dC + 2A \wedge H$  oftewel  $F'_{\mu\nu\rho\sigma} = 4 \partial_{[\mu} C_{\nu\rho\sigma]} + 4A_{[\mu} C_{\nu\rho\sigma]}$

Het is deze actie die uiteindelijk zal leiden tot zwart gat oplossingen. Het zal blijken dat een zwart gat gemodelleerd kan worden door  $p$ -branen die rond interne (gecompactificeerde) dimensies gewonden zijn. In eerste instantie gaan we dus op zoek naar die braanoplossingen van de actie 2.14.

### Einsteinframe versus stringframe

Afhankelijk van de situatie kan het handig zijn om bovenstaande formule, die in *stringframe* staat met metriek  $G_{\mu\nu}$  om te zetten naar een *Einstein-Hilbert* vorm  $S \sim \int \sqrt{g} R$ , met dan  $g_{\mu\nu}$  de metriek. Dan spreken we van *Einsteinframe*. Beide frames hebben hun toepassingsgebied, het *Einsteinframe* in het bijzonder zal nuttig blijken bij onderzoek van de eigenschappen van zwarte gaten. Om die reden zullen we nog dikwijls de overgang maken van stringframe naar Einsteinframe.

Het loont de moeite om expliciet het verband tussen beide metrieken te bepalen [2] [1] [3], in een willekeurig aantal (namelijk  $D$ ) dimensies. Als Ansatz nemen we dat beide metrieken verbonden zijn door een Weyltransformatie

$$g_{\mu\nu} = e^{2\omega} G_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

Dan volgt voor de determinanten  $G$  en  $g$  in een  $D$  dimensionale ruimtetijd

$$\sqrt{G} = \sqrt{\det(g_{\mu\nu} e^{-2\omega})} = \sqrt{g e^{-2\omega D}} = \sqrt{g} e^{-\omega D} \quad (2.16)$$



Voor de transformatieformule<sup>2</sup> van de Ricciscalar geldt

$$R' = R e^{-2\omega} (R - 2(D-1)\nabla^2\omega - (D-2)(D-1)\partial_\mu\omega\partial^\mu\omega) \quad (2.17)$$

Als het enkel gaat om het vinden van de gedaante van de metriek, is de eerste term voldoende.<sup>3</sup>

$$R = R' e^{2\omega} \quad (2.18)$$

Als we dan de originele vorm van de actie bekijken, en de relevante delen herschrijven

$$\begin{aligned} S &\sim \int \sqrt{G} e^{-2\phi} R \\ &\sim \int \sqrt{g} e^{-\omega D} e^{-2\phi} e^{2\omega} R' \end{aligned} \quad (2.19)$$

dan zien we dat de Einstein-Hilbert vorm bereikt kan worden als de voorwaarde

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega D - 2\phi + 2\omega \\ &\Downarrow \\ 2\omega &= -\frac{4\phi}{D-2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

voldaan is. Concreet vinden we in het geval van een tiendimensionale theorie als verband tussen de metriek in respectievelijk *stringframe* en *Einsteinframe*

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \exp\left[\frac{-4\phi}{D-2}\right] G_{\mu\nu} \\ &= e^{-\frac{\phi}{2}} G_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.21)$$

### 2.1.3 Oplossing

In de appendix B wordt dieper ingegaan op hoe men te werk kan gaan om een sugra actie van de vorm 2.14 te berekenen. Grofweg komt het erop neer om een Ansatz (met een harmonische functie  $f_p$ ) te poneren, en die vervolgens te controleren als mogelijke oplossing.

Het blijkt dat deze techniek algemeen geldig is, men kan steeds een Ansatz van de vorm B.54 gebruiken om een  $p$ -braan oplossing te construeren van de sugra-actie [12]. Algemeen uitgeschreven vinden we zo dat een algemene  $p$ -braan oplossing van de sugra-actie 2.14 er zo uit ziet

---

<sup>2</sup>Cf. [2], [1]

<sup>3</sup>De andere termen zullen zorgen voor een effect op de kinetische termen van het scalair veld  $\phi$ .

$$\begin{aligned}
ds^2 &= f_p^{-1/2}(-dt^2 + \dots + dx_p^2) + f_p^{1/2}(dx_{p+1}^2 + \dots + dx_9^2) \\
e^{-2\phi} &= f_p^{\frac{p-3}{2}} \\
A_{0\dots p} &= \frac{1}{2}(f_p^{-1} - 1)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

De  $p$ -branen dragen lading onder de  $A_{p+1}$  vormen. De  $f_p$  zijn ook hier harmonische functies, van de vorm

$$\begin{aligned}
f_p &= 1 + \frac{Q}{r^{(7-p)}} \\
&= 1 + \frac{nc_p^{(10)}}{r^{(7-p)}}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

De  $Q$  is de lading die de braan draagt onder de  $(p+1)$  vorm  $A$ . Dit wordt dan verder uitgeschreven als  $nc_p^{(10)}$ . De  $n$  is een integer (die het aantal branen telt), terwijl de coëfficiënt  $c_p^{(10)}$  gerelateerd is aan het type van de braan zelf. Ook is  $r$  de (transversale) afstand tot de braan

$$r^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_9^2 \tag{2.24}$$

Hier zien we dus expliciet dat  $f_p$  enkel afhangt van de transversale coördinaten. De interpretatie en de berekening van deze  $n$  en  $c_p$  vormen de rode draad doorheen de volgende secties.

## 2.2 Naar een theorie met minder dan tien dimensies

Een tiendimensionale theorie is uiteraard een theorie met (schijnbaar) een overmaat aan dimensies om een zwart gat te beschrijven zoals hetgeen waarheen wij op zoek zijn, namelijk een zwart gat in vijf dimensies. Indien we willen dat de supergravitatieactie 2.14 ons iets bijleert, moet er een mechanisme aanwezig zijn waardoor al die extra dimensies zich kunnen “verstoppen” voor ons, waarnemers in een (in dit geval dan toch) vijfdimensionale wereld.

Echter, er zijn al sinds lang ideeën voorhanden waarmee men theorieën in hogere dimensies manipuleert om zo uitspraken te kunnen doen over hoe ze zich manifesteren in lager dimensionale ruimtes.

Het globale idee is dat een  $D$  dimensionale ruimtetijd (oftewel een *manifold*) opgesplitst kan worden in (compacte) deelruimtes (zogenaamde *sub-manifolds*) en vervolgens kijkt naar de limiet waar bepaalde componenten<sup>4</sup> van de theorie niet meer afhangen van een bepaalde (compacte)

---

<sup>4</sup>Bijvoorbeeld een veld, of een parameter die afhangt van de ruimtetijdcoördinaten.

deelruimte. Deze procedure wordt doorgaans *Kaluza-Klein compactificatie* [1] [2] [3] genoemd.

Deze compactificatie zal de sleutel blijken om onze tiendimensionale  $p$ -braanoplossing 2.22 toch te kunnen laten leiden tot een vijfdimensionaal zwart gat. In eerste instantie (in subsectie 2.2.1) gaan we dieper in op het proces van compactificatie, vooral om te zien welke gevolgen dat dit met zich meedraagt in snaartheorie. Gewapend met deze basiskennis kunnen we dan snel begrijpen hoe “lading” afkomstig kan zijn van een bepaalde geometrie (in subsectie 2.2.2) en ook hoe de kwantisatie dan volgt uit een éénwaardige golffunctie.

Om tenslotte  $c_p^{(D)}$  expliciet te bepalen (nadat de theorie gecompactificeerd is), zullen we handig gebruik maken van verschillende dualiteiten. Hier wordt uitgebreid op ingegaan in de volgende sectie, 2.3.

### 2.2.1 Compactificatie

Het loont de moeite om compactificatie vanuit twee invalshoeken te bestuderen. De eerste invalshoek is het effect van compactificatie bestuderen op de *low energy effective action* die leeft in de targetruimte. Hierbij komt het in de praktijk erop neer om na te gaan wat het effect is van een targetruimte die één of meer compacte dimensies bevat.

De andere invalshoek, specifiek interessant voor snaartheorie, is kijken naar de invloed van compactificatie op het niveau van de tweedimensionale Polyakovactie 1.6. In dat geval kijkt men eigenlijk vanuit het standpunt van het wereldblad. Beide invalshoeken leggen elk andere aspecten van de dimensionale reductie bloot.

#### Compactificatie en de effectieve actie

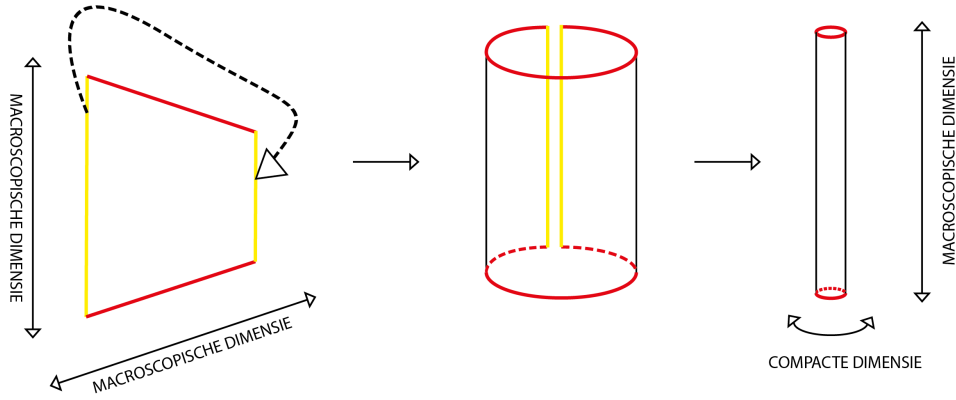
Het simpelste scenario [2] [1] dat men kan indenken voor een compactificatie is een targetruimte met deze vorm

$$\mathbf{R}^{1,24} \times \mathbf{S}^1 \tag{2.25}$$

Waarbij  $\mathbf{R}^{1,24}$  een 25-dimensionale Minkowskiruimte is, en  $\mathbf{S}^1$  een cirkel (een 1-dimensionale sfeer). De cirkel heeft een straal  $R$ , dus de coördinaat op  $\mathbf{S}^1$  heeft volgende periodiciteit

$$X^{25} \equiv X^{25} + 2\pi R \tag{2.26}$$

Dit is zogenaamde *toroïdale compactificatie*. Bijvoorbeeld, indien de originele ruimtetijd een begrensde tweedimensionale Euclidische ruimte is, dan is de toroïdale compactificatie simpelweg het verbinden (identificeren met elkaar) van twee zijden van die ruimte. Of nog simpeler: indien de Euclidische ruimte dit blad papier is, dan is toroïdale compactificatie te begrijpen als het oprollen van het blad tot een cilinder, cf. figuur 2.1.



Figuur 2.1: (Toroidale) compactificatie kan een dimensie verbergen voor een macroscopische waarnemer

De compactificatie heeft dus 1 dimensie periodiek gemaakt. Nu is het doel om te achterhalen hoe de fysica voor een waarnemer die leeft in de niet-compacte 25-dimensionale Minkowskiruimte  $\mathbf{R}^{1,24}$  eruit ziet. Voor deze waarnemer kan en mag niets afhangen van de  $X^{25}$  coördinaat, gezien die dimensie door de compactificatie verborgen blijft voor zo 'n waarnemer.

### Het Kaluza-Klein mechanisme

Laat ons beginnen met te kijken naar de energie-momentumvector

$$\begin{aligned}
 p^a p_a &= 0 & \text{waarbij } a &= 0, \dots, 25 \\
 p^\mu p_\mu &= -(p^{25})^2 = -|p^{25}|^2 & \mu &= 0, \dots, 24
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Waarbij de indices  $a$  dus lopen over alle dimensies en de indices  $\mu$  enkel lopen over de niet-compacte dimensies. Het momentum in de compacte dimensie  $p^{25}$  is echter niet willekeurig, gezien de golffunctie éénwaardig dient te zijn. De factor  $e^{ip^{25}X^{25}}$  in de golffunctie is verantwoordelijk voor de kwantisatie van  $p^{25}$

$$\begin{aligned}
 \exp(ip^{25} \cdot X^{25}) &= \exp(ip^{25}(X^{25} + 2\pi R)) \\
 &= \exp(ip^{25}X^{25}) \exp(ip^{25}2\pi R) \\
 &\Downarrow \\
 p^{25} &= \frac{n}{R}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

die noodzakelijk is om de éénwaardigheid te bewaren. Dus, door compactificatie verkrijgt de originele, massaloze theorie toch een volledig spectrum met massieve deeltjes (en één massaloos deeltje, corresponderend met  $n = 0$ ),

$$\begin{aligned}
M^2 &= p^\mu p_\mu \\
&\Downarrow \\
M &= \frac{|n|}{R}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Laat ons nu de aandacht vestigen op de metriek van de ruimtetijd in kwestie. De metriek wordt als volgt gedefinieerd<sup>5</sup>

$$ds^2 = G_{AB} dX^A dX^B = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + G_{25,25} (dX^{25} + A_\mu dX^\mu)^2 \tag{2.30}$$

Bij een diffeomorfisme

$$X'^A = X^A + \epsilon^A(X) \tag{2.31}$$

Varieert de metriek als volgt

$$G'_{AB} = G_{AB} - \partial_A \epsilon_B - \partial_B \epsilon_A \tag{2.32}$$

Een transformatie in de compacte dimensie ziet er als volgt uit

$$\begin{aligned}
X'^{25} &= X^{25} + \epsilon^{25}(X^\mu) \\
\epsilon^\mu &= 0 \quad \text{en} \quad \partial_{25} \epsilon^{25} = 0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Merk hierbij op dat  $\epsilon^{25}$  enkel afhangt van de niet-compacte  $X^\mu$ . Dit geeft aanleiding tot volgende functionele variatie van de componenten van de metriek

$$\begin{aligned}
G'_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} \\
G'_{\mu,25} &= G_{\mu,25} - \partial_\mu \epsilon^{25} \\
G_{25,25} &= G_{25,25}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Waar meteen opvalt dat de  $G_{\mu,25}$  component zich gedraagt zoals een vector. Het diffeomorfisme in de niet-gecompactificeerde targetruimte wordt dus een ijsymmetrie in de lager-dimensionale targetruimte. Dit geeft een radicaal nieuwe zienswijze op het begrip ijsymmetrie, in plaats van een extra keuzevrijheid (soms ook bestempeld als een *redundancy*) in onze beschrijving van de realiteit, is het nu een overblijfsel van een diffeomorfisme in een hoger dimensionale theorie.

---

<sup>5</sup>Deze metriek staat bekend als de Kaluza-Klein Ansatz. In de originele versie was het een vijfdimensionale metriek die gecompactificeerd werd naar vier dimensies. De veralgemening naar het geval in deze tekst is triviaal.

Dit was trouwens ook de originele motivatie van het Kaluza-Klein idee, door compactificatie van een vijfdimensionale gravitatie-theorie te komen tot een vierdimensionale gravitatie-theorie én tegelijk een theorie van het elektromagnetisme.

### Compactificatie en het wereldblad

Nu bekijken we hetzelfde fenomeen, maar dan vanuit het standpunt van de snaar zelf. We nemen opnieuw de eenvoudige toroïdale compactificatie aan

$$X^{25} \equiv X^{25} + 2\pi R \quad (2.35)$$

Deze speciale situatie laat ons toe om een randvoorwaarde 1.13 van de gesloten snaar  $X(\tau, \sigma) \equiv X(\tau, \sigma + 2\pi)$  minder strikt te maken in de compactificatierichting en te vervangen door

$$X^{25}(\tau, \sigma + 2\pi) \equiv X^{25}(\tau, \sigma) + (2\pi R) \cdot w \quad (2.36)$$

Deze  $w$  heeft als directe interpretatie het aantal windingen van de snaar rond de compacte dimensie. Merk op, een snaar met  $w \neq 0$  kan dus ook nooit een puntdeeltje worden, en verschilt op die manier ook fundamenteel van een snaar met  $w = 0$ . Dit verschijnsel heeft geen analogon in veldentheorie en is typisch voor snaartheorie.

### Intermezzo: modusontwikkeling gesloten snaar in complexe coördinaten

We nemen een gesloten snaar in complexe coördinaten (we bestuderen hier het holomorfe deel) en we kijken naar de Laurentontwikkeling van de afgeleide

$$\begin{aligned} \partial X^\mu(z) &= -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \sum \frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}} \\ \Rightarrow \alpha_m^\mu &= \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \oint \frac{\partial X^\mu(z) z^m}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Als we dan verder gebruik maken van de eigenschap dat een snaar ook in integraalvorm geschreven kan worden

$$X^\mu = X_1^\mu(z) + X_2^\mu(\bar{z}) = \int_0^z \partial X_1^\mu(z) dz + \dots \quad (2.38)$$

en vervolgens de periodiciteit met periode  $2\pi$  in de  $\sigma$  coördinaat expliciet doorwerken

$$\begin{aligned}
X_1^\mu(ae^{2\pi i}) + X_2^\mu(ae^{-2\pi i}) &= X_1^\mu(a) + X_2^\mu(a) \\
X_1^\mu(ae^{2\pi i}) - X_1^\mu(a) &= X_2^\mu(a) - X_2^\mu(ae^{-2\pi i}) \\
\oint \partial X^\mu(z) &= - \oint \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) \\
\alpha_0^\mu &= \tilde{\alpha}_0^\mu
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Eénwaardigheid vereist dus  $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu$ . Compactificatie gaat deze eigenschap verzwakken.

De definitie van  $p^\mu$  bij de gesloten snaar [1] is de volgende:

$$\begin{aligned}
p^\mu &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz j^\mu - d \bar{z} \bar{j}^\mu \\
j^\mu &= \frac{i}{\alpha'} \partial X^\mu(z) \\
p^\mu &= \frac{1}{(2\alpha')^{1/2}} (\alpha_0^\mu + \tilde{\alpha}_0^\mu) \\
p^\mu &= \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \alpha_0^\mu
\end{aligned} \tag{2.40}$$

### Toepassen bij compactificatie

Om de invloed van de compactificatie, en vooral om de betekenis van *winding* te begrijpen, bekijken we nu ook de modusontwikkelingen in het geval van een gecompactificeerde snaar. Als we een kringintegraal rond de compacte dimensie bekijken vinden we

$$\begin{aligned}
\oint dX^{25}(z, \bar{z}) &= \oint \partial X^{25} dz + \bar{\partial} X^{25} d\bar{z} = 2\pi R w \\
&= (\alpha_0^{25} - \tilde{\alpha}_0^{25}) \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \\
&\Downarrow \\
\alpha_0^{25} - \tilde{\alpha}_0^{25} &= \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} R w \\
&= 2 \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \frac{R w}{\alpha'}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Verder volgt uit de betrekking 2.40,

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{25} + \tilde{\alpha}_0^{25} &= 2 \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} p^{25} \\
&= 2 \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \frac{n}{R}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Als we beide nieuwe betrekkingen combineren, vinden we voor  $\alpha_0^{25}$  de volgende relaties:

$$\begin{aligned}\alpha_0^{25} &= \left(\frac{n}{R} + \frac{Rw}{\alpha'}\right) \cdot \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} = (p^{25} + p_w) \cdot \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} = p_L^{25} \cdot \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \\ \tilde{\alpha}_0^{25} &\sim (p^{25} - p_w) \sim p_R^{25}\end{aligned}\tag{2.43}$$

Hier introduceerden we

$$\begin{aligned}p_L^{25} &= p^{25} + p_w \\ p_R^{25} &= p^{25} - p_w\end{aligned}\tag{2.44}$$

Waarbij dan

$$p^{25} = \frac{n}{R}\tag{2.45}$$

bekend staat als *Kaluza-Klein momentum* en

$$p_w = \frac{R}{\alpha'} w\tag{2.46}$$

als *winding*. De  $\alpha_0^{25}$  bevatten nu een momentumcomponent, die opgebouwd is uit een stukje dat afkomstig is van winding en een stukje dat rechtstreeks afkomstig is van de *Kaluza-Klein* procedure.

### Invloed op het spectrum

Om het effect van de compactificatie op het spectrum te zien, schrijven we de Virasoro-operator  $L_0$  (1.35) nogmaals expliciet uit

$$\begin{aligned}L_0 &= \frac{1}{2} \alpha_0^\mu \alpha_{0\mu} + N \\ &= \frac{1}{2} \alpha_0^\nu \alpha_{0\nu} + \alpha_0^{25} \alpha_{0,25} + N\end{aligned}\tag{2.47}$$

De compactificatie zorgt ervoor dat de constraint  $\alpha_0^{25} = \tilde{\alpha}_0^{25}$  niet meer moet gelden. In een enkele Virasoro-operator maakt dit geen verschil met het niet-gecompactificeerde scenario, maar in de constraints 1.42 (die een combinatie van verschillende operators bevatten) zal de compactificatie zich wel laten voelen.



$$\begin{aligned}
L_0 - \tilde{L}_0 &= \frac{1}{2}((\alpha_0^{25})^2 - (\tilde{\alpha}_0^{25})^2) + N - \tilde{N} \\
&= \frac{\alpha'}{4} p^{25} p_w + N - \tilde{N} \\
&= \alpha' \frac{Rw}{\alpha'} \frac{n}{R} + N - \tilde{N} \\
&= nw + N - \tilde{N}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Dus de constraint 1.42 levert dan,

$$L_0 - \tilde{L}_0|\phi\rangle = 0 \Rightarrow nw + N - \tilde{N}|\phi\rangle = 0 \tag{2.49}$$

wat ons dan vertelt dat *level-matching* 1.45 geen noodzaak meer is, links -en rechtslopende oscillators kunnen een verschillende excitatieniveau hebben, mits “compensatie” met winding en Kaluza-Klein momentum.

De massa-operator in de niet-compacte ruimtetijd<sup>6</sup>( $X^\nu$  met  $\nu = 0, \dots, 24$ ) definiëren we als volgt

$$\begin{aligned}
M^2 &= -p^\nu p_\nu \\
&= \frac{-1}{2\alpha'}(\alpha_0^\nu + \tilde{\alpha}_0^\nu)(\alpha_{0\nu} + \tilde{\alpha}_{0\nu}) \\
&= -\frac{1}{\alpha'}(\alpha_0^\nu \alpha_{0\nu} + \tilde{\alpha}_0^\nu \tilde{\alpha}_{0\nu}) = -\frac{1}{\alpha'}((\alpha_0^\nu)^2 + (\tilde{\alpha}_0^\nu)^2)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Vervolgens vinden we

$$\begin{aligned}
L_0 + \tilde{L}_0 &= \frac{1}{2}((\alpha_0^{25})^2 + (\tilde{\alpha}_0^{25})^2) + \frac{1}{2}(((\alpha_0^\nu)^2 + (\tilde{\alpha}_0^\nu)^2)) + N + \tilde{N} \\
&= \frac{1}{2}(p_w^2 + (p^{25})^2)2\frac{\alpha'}{2} - \frac{\alpha'}{2}M^2 + N + \tilde{N} \\
&= \frac{1}{2}(\alpha' \frac{n^2}{R^2} + \frac{R^2 w^2}{\alpha'}) - \frac{\alpha'}{2}M^2 + N + \tilde{N}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

dit zorgt dan dat de andere Virasoro-constraint in 1.42 ook aangepast wordt

---

<sup>6</sup>Dit is de massa waarin we geïnteresseerd zijn, degene die wordt waargenomen door een waarnemer die leeft in de niet-compacte ruimtetijd. Het doel van deze analyse is uitzoeken op welke manier de compacte dimensies toch de niet-compacte ruimtetijd beïnvloeden.

$$L_0 + \tilde{L}_0 + 2|\phi\rangle = 0$$

↓

$$\frac{\alpha'}{2}M^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha'\frac{n^2}{R^2} + \frac{R^2w^2}{\alpha'}\right) - N - \tilde{N} + 2 = 0 \quad (2.52)$$

Dit geeft tenslotte voor de massa

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{n^2}{R^2} + \frac{R^2w^2}{\alpha'} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \\ &= (p^{25})^2 + (p_w)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \end{aligned} \quad (2.53)$$

De massa krijgt dus twee bijdragen, een eerste van  $p^{25}$ , het momentum in de compacte richting. Een tweede bijdrage van  $p_w$ , deze valt te interpreteren als een potentiële energie van een snaar ( $E = T \cdot l$ ) met spanning  $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$  die  $w$  keer gewikkeld is rond een compacte dimensie met omtrek  $l = 2\pi R$ .

### 2.2.2 Geometrisch karakter van lading

Compactificatie geeft niet alleen aanleiding tot een aangepast massaspectrum maar biedt ook een elegant mechanisme om ladingen aan snaren te geven. Deze lading kan afgelezen worden uit de coëfficiënt bij de driepuntsinteractie.

De vertexoperator van de fotonen [2] [1] ziet er als volgt uit

$$V_{\pm}(p) \sim \int d^2z \zeta_{\mu} (\partial X^{\mu} \bar{\partial} \bar{X}^{25} \pm \partial X^{25} \bar{\partial} \bar{X}^{\mu}) e^{ip \cdot X} \quad (2.54)$$

De eenvoudigste interactie die we kunnen bekijken is die van deze fotonen met het tachyon. Dat dienen we nog aan te kleden met KK-momentum  $n$  en winding  $w$ , wat eenvoudig bereikt kan worden door vermenigvuldiging<sup>7</sup> met  $e^{ip_L X} e^{ip_R \bar{X}}$ .

$$V_{n,w}(p) \sim \int d^2z e^{ip_L X} e^{ip_R \bar{X}^{25}} e^{ip_L X^{25}} \quad (2.55)$$

De coëfficiënt van de driepuntsinteractie is dan van de vorm

$$\langle V_{\pm}(p_1) V_{n,w}(p_2) V_{-n,-w}(p_3) \rangle \sim \delta^{25}(p_i) \zeta_{\mu}(p_2 - p_3) (p_L \pm p_R) \quad (2.56)$$

---

<sup>7</sup>Deze procedure is volledig analoog aan het geven van een traditioneel momentum aan een toestand. Dit mag niet verbazen, gezien beide grootheden  $p_L, p_R$  opdoken bij de uitwerking van  $\alpha_0$  in 2.43.

De eerste factoren zijn kinematisch, maar de  $(p_L \pm p_R)$  geeft ons informatie over de lading. Stel, het foton is afkomstig van het  $A_\mu$  veld ( $V_+$  is dan de vertexoperator van het foton), dan krijgen we een lading  $p_L + p_R \sim n/R$ . Analoog, hebben we te maken met een foton van het  $\tilde{A}_\mu$  veld, dan krijgen we een lading  $p_L - p_R \sim wR/\alpha'$ .

### 2.2.3 Periodieke oplossing

#### Superpositie van verschillende branen

Gezien elke oplossing afkomstig is van de homogene, harmonische functie, kan een oplossing opgebouwd uit meerdere branen (in de literatuur gekend als *multiple brane solution*) gemakkelijk worden samengesteld door verschillende individuele oplossingen te superponeren [9] [13],  $f$  ziet er dan zo uit

$$f = 1 + \sum_i \frac{c_p}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^{7-p}} \quad (2.57)$$

De fysische reden waarom dat dit werkt is in feite dezelfde als waarom de enkelvoudige oplossing werkt. In een BPS-toestand (cf. appendix C) is er steeds een evenwicht tussen gravitationele en elektromagnetische kracht. Net zoals de enkelvoudige oplossing stabiel is, zorgen de elektromagnetische en gravitationele krachten tussen de verschillende branen ervoor dat ook de *multiple brane solution* mooi in balans is en blijft. Laat ons echter even benadrukken dat elektromagnetische kracht hier een term is die toegepast wordt louter uit gewoonte, het is correcter om te spreken van een *repulsive gauge force*, net zoals de elektromagnetische wisselwerking er één is.

Op dit punt zitten we nog altijd in een situatie met een overmaat aan dimensies, namelijk een  $p$ -braan in een  $D$  dimensionale ruimte. Om uit dergelijke theorie fysica te verkrijgen die interessant is in de wereld die we waarnemen biedt dimensionale reductie (door compactificatie van dimensies) ons een uitweg. Er zijn echter twee scenario's mogelijk, afhankelijk van de gekozen compactificatierichting.

Een eerste scenario is dat we compactificeren in een richting die parallel is aan de braan, dan zal het resultaat een  $(p - 1)$  dimensionale braan in een  $(D - 1)$  dimensionale ruimtetijd zijn. In die richting zal de braan dan zelf gecomcompactificeerd zijn op de cirkel. Als dit met alle richtingen van de braan gebeurt, zal de braan een gelokaliseerd object worden.

Een tweede scenario is dat we compactificeren in een richting die loodrecht staat op de braan, dan is het resultaat een  $p$  dimensionale braan in een  $(D - 1)$  dimensionale ruimtetijd. Dit is echter niet zomaar toegestaan, omdat het duidelijk is dat die richting geen symmetrie van onze oplossing is, op een bepaalde hoogte in die richting zit immers een braan, en op andere hoogtes niet. Om hieraan te ontkomen bouwt men een rooster van verschillende branen.

## Periodiek rooster van branen bouwen

Gezien het compactificeren van een transversale richting de symmetrie van het systeem breekt, zoeken we een configuratie die toch een zekere symmetrie in die richting heeft, in de hoop dat we die op de één of andere manier kunnen redden. Het fundamentele inzicht is hier het volgende:

*Beschikt men over een oplossing in  $D$  dimensies die periodiek is onder  $X_i \rightarrow X_i + 2\pi R$ , waarbij  $X_i$  een transversale coördinaat voorstelt<sup>8</sup>, dan is die na toroidale compactificatie (met compactificatiestraal  $R$ ) langs  $X_i$ , ook een oplossing van de gecompectificeerde theorie.*

Voor het bouwen van een periodieke oplossing, maken we gebruik van een rooster  $\mathbf{A}$  in de transversale richtingen, zodat we deze samengestelde harmonische functie verkrijgen:

$$f = 1 + \sum_{\vec{n} \in \mathbf{A}} \frac{C_p}{|\vec{r} - 2\pi R_i \vec{n}|^{7-p}} \quad (2.58)$$

Deze superpositie geeft ons een directe correspondentie tussen oplossingen in de  $D$  dimensionale theorie en oplossingen in de gecompectificeerde,  $d$  dimensionale theorie. Voor eenvoud en duidelijkheid veronderstellen we hier compactificatie op een  $T^{10-d}$  dimensionale torus. Zoals eerder al aangehaald, eens een braan volledig op compacte dimensies ligt, wordt de braan zelf een gelokaliseerd object. Vanuit het punt vanuit de macroscopische dimensies zal zo'n situatie sferisch symmetrisch zijn. Vooruitlopend op de feiten kunnen we intuïtief zien dat zo'n oplossing best wel wat potentieel als interessante, *black hole like* oplossing vertoont, een gelokaliseerd object met interne structuur. Compactificatie lijkt dus een geschikte strategie om tot een oplossing te komen die onze eisen tegemoet komt.

Om te zien hoe de oplossing zich gedraagt, kunnen we de som uitwerken. De som loopt over een  $(10 - d - p)$ -dimensionaal rooster, want de parallele dimensies van de braan in het rooster stoppen is logischerwijze zinloos, gezien de periodiciteit in een parallele richting manifest is.

In de limiet van een kleine compactificatiestraal kan de som vervangen worden door een integraal

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbf{A}} \rightarrow \int d^{10-d-p} X \quad (2.59)$$

Die dan eenvoudig uitgewerkt kan worden tot

---

<sup>8</sup>Indien  $X_i$  geen transversale coördinaat is, dan wordt een richting van de braan zelf gecompectificeerd en zitten we dus in het eerder vermelde geval.

$$\begin{aligned}
f &= 1 + \frac{c_p^{(d)}}{|\bar{r}|^{7-p-10+d+p}} \\
&= 1 + \frac{c_p^{(d)}}{|\bar{r}|^{d-3}}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

De afhankelijkheid van  $p$  in de noemer is hier verdwenen, de enige manier om in de compacte theorie de onderliggende  $p$ -braan nog te identificeren zijn de  $c_p^{(d)}$ , die nog steeds afhangen van de  $p$ -braan in kwestie.

## 2.3 U-dualiteit

In de subsectie 2.4.1 zijn we erin geslaagd om  $c_p^{(D)}$  in verband te brengen met de ADM-massa  $M$  van de braanoplossing in resultaat 2.94. Dit is echter nog niet voldoende om de  $c_p^{(D)}$  expliciet uit te werken.

Om expliciete uitdrukkingen voor de massa's van de verschillende soorten branen te vinden kiezen we ervoor om te werk te gaan via zogenaamde *dualiteiten*. Een beknopte inleiding (in subsecties 2.3.1, 2.3.2) tot de voor ons relevante dualiteiten vormt dan een logisch uitgangspunt. Een van de voordelen van deze aanpak is de eenvoud waarmee verschillende massa's met elkaar in verband gebracht kunnen worden.

De praktische toepassing van deze dualiteiten in ons verhaal behandelen we dan in subsectie 2.4.2. Hierna rest ons dan nog enkel om die resultaten samen te voegen met de reeds gevonden resultaten in subsectie 2.4.1. Zo komen we dan tenslotte tot een expliciete formulatie van  $c_p^{(D)}$  in de laatste subsectie, 2.4.3.

### 2.3.1 T-Dualiteit

#### Spectrumanalyse [2]

Indien we kijken naar het massaspectrum van de snaar 2.53 in een ruimte met één compacte dimensie  $X^{25}$  dan merken we een bijzonderheid op: dit spectrum is invariant onder de transformatie

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R} \tag{2.61}$$

indien men tegelijkertijd de twee parameters

$$n \leftrightarrow w \tag{2.62}$$

ook omwisselt. Deze transformatie is wat men noemt een *T-dualiteit transformatie*. Het volledige spectrum van de theorie blijft ongewijzigd indien met  $R$  vervangt door  $\frac{\alpha'}{R}$ , op voorwaarde dat men ook  $n$  en  $w$  omwisselt. Het omwisselen van  $n$  en  $w$  is in dat opzicht niet meer dan een herindeling, beide zijn immers gewoon integers.

Wat betekent dit? Stel dat wij waarnemers zouden zijn die leven in een 25-dimensionale wereld (26 met de tijd erbij), zou het voor ons onmogelijk zijn om een onderscheid te maken tussen een theorie die gecompactificeerd is op een cirkel met straal  $R$  of met straal  $\frac{\alpha'}{R}$ . Het lijkt alsof er een soort fysische equivalentie bestaat tussen grote en kleine afstanden.

Om voor dit bizarre fenomeen meer voeling te krijgen, spitsen we ons toe op de limietgevallen. Neem  $R \rightarrow \infty$ , dan zien we dat het discrete spectrum 2.53 van KK-toestanden  $\left(\frac{n}{R}\right)$  overgaat op een continuüm van toestanden. Met andere woorden, het momentum moet niet langer gekwantiseerd zijn, we gaan dus over naar een regime waarin er niet langer sprake is van compactificatie. Dit mag natuurlijk niet verbazen, gezien “compactificeren” op een cirkel met straal  $R \rightarrow \infty$  eigenlijk gewoon equivalent is aan het niet uitvoeren van een compactificatie.

Hoe vergaat het de T-duale theorie in dat scenario? Indien  $R \rightarrow \infty$ , betekent dat voor de duale straal  $\frac{\alpha'}{R} \rightarrow 0$ . Maar, ook hier zien we het ontstaan van een continuüm, ditmaal niet afkomstig van de KK-toestanden maar van de gewonden toestand. Ook dit is logisch, de straal wordt zo klein dat een winding aanleggen amper nog extra energie kost<sup>9</sup>.

Deze equivalentie tussen grote en kleine  $R$  is geen toevallige eigenschap van het spectrum, maar echt van de ganse snaartheorie [2] [3]. T-dualiteit is effectief een fysische equivalentie tussen verschillende theorieën, of beter gezegd, T-dualiteit toont aan dat twee schijnbaar verschillende theorieën verschillende formulaties zijn van één en dezelfde onderliggende fysica.

## Targetruimte

Indien we kijken naar  $P_R$  en  $P_L$

$$\begin{aligned} P_L &= p^{25} + p_w = \frac{n}{R} + \frac{Rw}{\alpha'} \\ P_R &= p^{25} - p_w = \frac{n}{R} - \frac{Rw}{\alpha'} \end{aligned} \tag{2.63}$$

dan geeft een T-dualisatie aanleiding tot

---

<sup>9</sup>De energie die een winding aanleggen kost wordt gegeven door  $E = T \cdot L = T \cdot 2\pi\alpha'/R$ .

$$\begin{aligned}
P_L &\rightarrow P_L \\
P_R &\rightarrow -P_R
\end{aligned}
\tag{2.64}$$

We zijn geïnteresseerd hoe de snaarcomponenten zich gedragen onder deze transformatie. We beginnen bij het uitschrijven van  $X^{25}$

$$X^{25} = X_L^{25}(z) + X_R^{25}(\bar{z}) \tag{2.65}$$

gemotiveerd door 2.64 stellen we een nieuwe snaarcoördinaat voor

$$Y^{25} = Y_L^{25}(z) - Y_R^{25}(\bar{z}) \tag{2.66}$$

dit is dan het equivalent van  $X^{25}$  voor de T-duale snaar. Gezien geldt  $\partial Y^{25} = \partial X^{25}$  en  $\bar{\partial} X^{25} = -\bar{\partial} Y^{25}$  is de energie-momentumtensor invariant [2] onder deze overgang, alle interacties en correlaties in deze theorieën zijn dus gelijk aan elkaar.

## Branen

Wat is de invloed van T-dualiteit op branen? Stel dat  $X^{25}$  een transversale richting is op een gegeven braan. De Dirichlet-randvoorwaarde is in dat geval

$$\partial_\tau X^{25} = 0 \quad \text{als} \quad \sigma = 0, \pi \tag{2.67}$$

Indien we T-dualiseren geeft dit

$$\partial_\tau X^{25} = \partial_\sigma Y^{25} = 0 \quad \text{als} \quad \sigma = 0, \pi \tag{2.68}$$

maar dat is weer een Neumannrandvoorwaarde. De braan heeft dus één parallelle richting bijgekregen. De  $Dp$ -braan in de originele theorie wordt na T-dualisatie in een transversale richting een  $D(p+1)$ -braan in de duale theorie. Op deze manier zullen we T-dualisatie dikwijls gebruiken, als “constructiemethode” om willekeurige branen te bouwen uit eenvoudigere objecten.

Dit werkt ook in de omgekeerde richting, indien we T-dualiseren in een parallelle richting aan de braan bekomen we in de duale theorie een  $D(p-1)$ -braan, afkomstig van de originele  $Dp$ -braan.

## Het dilaton

Het dilaton, of de snaarkoppeling, ondergaat ook een transformatie onder T-dualiteit. Als we naar de low energy effective action kijken, gecomcompactificeerd op een torus met straal  $R$ , krijgen we iets van deze vorm [2]

$$\frac{2\pi R}{2l_s^{24}g_s^2} \int d^{25}X \sqrt{-G} e^\sigma R \quad (2.69)$$

Echter, als we willen dat T-dualiteit een equivalente theorie oplevert, mag deze actie ook niet wijzigen onder  $R \rightarrow \frac{\alpha'}{R}$ . Dit kunnen we enkel bereiken als T-dualisatie het dilaton ook wijzigt, en wel zo dat de koppelingsconstante  $g_s$  wordt aangepast

$$g_s \rightarrow \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} g_s \quad (2.70)$$

Samengevat komt T-dualiteit toe passen dus neer op het maken van volgende substituties

$$\begin{aligned} R &\rightarrow \frac{1}{R} \\ g_s &\rightarrow \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} g_s \end{aligned} \quad (2.71)$$

### 2.3.2 S-dualiteit

Naast T-dualiteit, bestaat er ook een S-dualiteit. Deze wordt gedefinieerd [9] als

$$\begin{aligned} g &\rightarrow \frac{1}{g} \\ R &\rightarrow \frac{R}{\sqrt{g}} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Zoals te zien in 2.72 poneert deze dualiteit een equivalentie tussen de zwakke en de sterk gekoppelde regimes van een theorie. Deze dualiteit verbindt dus geen verschillende theorieën met elkaar zoals T-dualiteit, speelt zich af binnen één en dezelfde theorie. Deze S-dualiteit zal ook de Einstein-metrik invariant laten.

In de praktijk zullen we S-dualiteit gebruiken om  $D$ -branen om te zetten in “solitonische branen” (in de literatuur gekend als *solitonic branes*), een andere type braan. Bijvoorbeeld, in het geval we een fundamentele snaar (soms genoteerd als  $F1$ ) S-dualiseren verkrijgen we een  $D1$ -braan. In onderstaande tabel geven we een overzichtje van de verschillende objecten die met elkaar verbonden zijn door S-dualiteit [3] [14].



IIB met $g_s$	$\leftrightarrow$	IIB met $g'_s = \frac{1}{g_s}$
F1		D1
D1		F1
D3		D3
D5		NS5
NS5		D5

Net zoals T-dualiteit kan S-dualiteit dus toegepast worden om een bepaalde situatie (bijvoorbeeld een fundamentele snaar) om te zetten in een andere situatie (bijvoorbeeld een  $D1$ -braan, indien we S-dualiteit gebruiken), die fysisch gezien equivalent is. S-dualiteit en T-dualiteit laten ons op die manier niet enkel toe het probleem efficiënt aan te pakken door het om te zetten naar de eenvoudigste vorm, maar ook dat de oplossing en eigenschappen die gevonden worden, ook gelden voor een klasse equivalente problemen.

T-dualiteit en S-dualiteit zijn de dualiteiten die we in het vervolg van deze tekst nog gaan gebruiken. Er bestaan echter nog andere dualiteiten en onderzoek naar deze equivalenties lag aan de basis van de zogenaamde *M-theorie* [3] [6]. Verschillende snaartheorieën blijken nauw en fundamenteel met elkaar verbonden te zijn door dualiteiten, waaruit het idee groeit dat ze allemaal verschillende verschijningsvormen zijn van één fundamentele theorie, die gekend is onder de naam M-theorie.

## 2.4 Uitwerking van de coëfficiënten $c_p$

Het doel van deze sectie bestaat erin om de harmonische functie  $f_p$  (2.23), een sleutelbestanddeel in onze  $p$ -braanoplossing expliciet te bepalen. De coëfficiënt  $c_p^{(D)}$  is hier het fundamenteel bestanddeel. De eerste stap bestaat erin een relatie te vinden die  $c_p$  en de massa  $M$  van de braan in kwestie met elkaar verbindt. Deze eerste massabepaling doen we via de Komar-integraal en de ADM-massa in subsectie 2.4.1.

In subsectie 2.4.2 bepalen we de massa's van de verschillende bouwstenen expliciet. Ook tonen we aan dat deze massa's nauw met elkaar verbonden zijn door de verschillende dualiteiten. In de laatste subsectie 2.4.3 verbinden we dan de resultaten uit de eerste twee en zo bekomen we expliciete formules voor de  $c_p^{(D)}$ .

### 2.4.1 Op zoek naar de massa van de braan

Ons doel is dus het bepalen van de lading  $Q = nc_p^{(D)}$  van de gevonden oplossing 2.23. Hier bestaan verschillende technieken voor. We kiezen ervoor om in eerste instantie via massabepaling te werk te gaan. In het extremale geval geldt immers  $M = Q$ . Dit is te zien in appendix D, het volstaat om in formule D.5  $r_+ = r_- = r_e$  te stellen<sup>10</sup>

<sup>10</sup>Bovendien is dit extremale geval tevens een *BPS-toestand*, een toestand met minimale massa voor een gegeven lading. Voor een beknopte beschrijving van dat begrip cf. appendix C

De massabepaling alleen zal ons nog niet in staat stellen om de coëfficiënt  $c_p^{(D)}$  van de braan-oplossing te bepalen. Het doel in deze subsectie bestaat er enkel in om een verband te vinden tussen  $M$ , de massa van de braan en de  $c_p^{(D)}$ . Later zullen we de massa's van de branen ook nog via dualiteiten bepalen, en dan kunnen de coëfficiënten wel expliciet berekend worden.

## ADM-Massa

De definitie van massa in algemene relativiteit is geen sinecure en er zijn zelfs meerdere definities in omloop. De voor de hand liggende route is een veralgemening van de manier waarop men in klassieke elektrodynamica een lading berekent, door een oppervlakte-integraal op oneindig van de stroomviervector te berekenen. In deze paragraaf geven we een kort overzicht, voor een meer gedetailleerde behandeling cf. [15] [16] [17]

Er zijn twee courante formules om de massa van een bepaalde ruimtetijd te berekenen, een eerste is de *Komar-integraal*, gedefinieerd als

$$E_{Komar} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi G_N} \oint dS_\mu \partial h_{00} \quad (2.73)$$

Het is deze definitie die het dichtst aanleunt bij een veralgemening van de ladingsberekening in elektrodynamica. En een tweede grootheid is de *ADM-massa*<sup>11</sup>

$$E_{ADM} = \frac{1}{16\pi G_N} \oint dS_\mu (\partial_\nu h_\mu^\nu - \partial_\mu h_\nu^\nu) \quad (2.74)$$

De  $h_{\mu\nu}$  is het stuk van de metriek dat afwijkt van de vlakke ruimte

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.75)$$

Dit is gelijkaardig aan perturbatietheorie, maar er is een essentieel verschil. De perturbatie dient enkel op oneindig zeer klein te worden, we zijn niet geïnteresseerd in welke mate de metriek afwijkt van de  $\eta_{\mu\nu}$  binnen het (hyper)oppervlak dat we beschouwen. Een mooie en tevens essentiële eigenschap, gezien we op die manier de resultaten nog kunnen vertrouwen, zelfs als er zich een singulariteit in ons oppervlak bevindt.

---

<sup>11</sup>Genoemd naar ontdekkers Arnowitt, Deser en Misner

## De Schwarzschildmetriek

Om voeling te krijgen voor de situatie, gaan we het ADM-mechanisme toepassen op het eenvoudigste zwart gat, geparametriseerd door de *Schwarzschildmetriek*. [15]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mG_N}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2mG_N}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.76)$$

Enkel het asymptotisch gedrag van het ruimtelijke deel is in dit geval relevant

$$\begin{aligned} ds_{t=t_0}^2 &= \frac{1}{1 - \frac{2mG_N}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \approx \left(1 + \frac{2mG_N}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \underbrace{\frac{2mG_N}{r} dr^2}_{=h_{\mu\nu}} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Waarbij we daarenboven enkel  $h_{\mu\nu}$  nodig hebben in de verdere berekening. Het loont nog om dit om te zetten in Cartesische coördinaten

$$\frac{2mG_N}{r} dr^2 = \frac{2mG_N}{r^3} X_\mu X_\nu dX^\mu dX^\nu = h_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (2.78)$$

Waarbij geldt  $\partial r / \partial X^\mu = X^\mu / r$ . Het integrandum in 2.74 gaan we term per term behandelen, ten eerste

$$\begin{aligned} \partial_\nu h_{\mu\nu} &= \partial_\nu \frac{2mG_N}{r^3} X_\mu X_\nu \\ &= \frac{2mG_N}{r^3} X_\mu \partial_\nu X_\nu - 3 \cdot \frac{2mG_N}{r^5} X_\mu (X_\lambda)^2 \\ &= \frac{2mG_N}{r^3} (D-1) X_\mu + 2 \cdot \frac{2mG_N}{r^3} X_\mu - 3 \cdot \frac{2mG_N}{r^5} X_\mu (X_\lambda)^2 \\ &= \frac{2mG_N}{r^3} (D+1-3) X_\mu \\ &= \frac{2mG_N}{r^3} (D-2) X_\mu \end{aligned} \quad (2.79)$$

en ten tweede

$$\begin{aligned} \partial_\mu h_{\nu\nu} &= 2 \cdot \frac{2mG_N}{r^3} X_\mu - 3 \cdot \frac{2mG_N}{r^3} X_\mu \\ &= -\frac{2mG_N}{r^3} X_\mu \end{aligned} \quad (2.80)$$

Als we dit dan volledig invullen in 2.74, wetende dat in dit geval geldt<sup>12</sup>  $D = 3$  dan vindt men

<sup>12</sup>Let wel, enkel het ruimtelijke deel van de metriek wordt meegerekend, cf. 2.77.

$$\begin{aligned}
E_{ADM} &= \frac{1}{16\pi G_N} \oint dS_\mu \frac{4mG_N}{r^3} X_\mu \\
&= \frac{1}{16\pi G_N} \cdot 4\pi r^3 \frac{4mG_N}{r^3} = m
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Dit is de oplossing die we inderdaad hoopten te vinden bij de massaberekening, gezien ze overeenkomt met de massa van het Schwarzschild zwart gat. De ADM-procedure geeft ons inderdaad zinvolle massa's en is ook bruikbaar in het geval van singulariteiten.

De *Komar*-integraal zou hetzelfde resultaat moeten geven, in plaats van de perturbaties op oneindig, heeft deze enkel de  $g_{00}$  component op oneindig nodig. In het Schwarzschild geval is dat

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -1 + \frac{2mG_N}{r} \\
h_{00} &= \frac{2mG_N}{r}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Als we dit in 2.73 passen, verkrijgen we

$$\begin{aligned}
E_{Komar} &= - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi G_N} \oint dS_\mu \partial_\mu \frac{2mG_N}{r} \\
&= \frac{1}{8\pi G_N} \oint dS_\mu \frac{2mG_N}{r^2} \\
&= m
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Wat overeenstemt met de ADM-berekening. De Komar-integraal biedt ons de mogelijkheid om het gedrag van de  $g_{00}$  component op oneindig te gebruiken om de massa van een bepaalde ruimtetijd uit af te lezen. “De massa van een bepaalde ruimtetijd” betekent in de praktijk overigens zoveel als “de massa van het zwart gat in kwestie”. Eender welke metriek van de vorm

$$g_{00} = -1 + \frac{a}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \tag{2.84}$$

Geeft als resultaat [16] in de Komar-integraal

$$\begin{aligned}
E_{Komar} &= - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi G_N} \oint dS_\mu \partial_\mu \frac{a}{r} \\
&= \frac{a}{2G_N}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Het enige dat nu nog rest is een veralgemening van deze diagnose-tool naar  $D$  dimensies. De Schwarzschildmetriek in  $D$  dimensies

$$ds^2 = -(1 - f(r)) dt^2 + \frac{1}{(1 - f(r))} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}(r) \quad (2.86)$$

ziet er zo uit. Men kan aantonen [18] dat de expliciete vorm

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{16\pi G_D}{(D-2)\omega_{D-2}} \frac{M}{r^{D-3}} \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{16\pi G_D}{(D-2)\omega_{D-2}} \frac{M}{r^{D-3}} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}(r) \quad (2.87)$$

deze is. Hier stelt

$$\omega_p = \frac{2\pi^{\frac{p+1}{2}}}{\Gamma(\frac{p+1}{2})} \quad (2.88)$$

het volume van de eenheidssfeer  $\mathbf{S}^p$  voor.

### Massabepaling met behulp van de metriek op oneindig

In  $D$  dimensies heeft de  $g_{00}$  component volgende vorm [13]

$$g_{00} \approx -1 + \frac{16\pi G_N^{(D)}}{(D-2)\omega_{D-2}} \frac{M}{r^{D-3}} \quad (2.89)$$

met  $\omega_n$  het volume van  $\mathbf{S}^n$

$$\omega_n = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{(n+1)}{2})} \quad (2.90)$$

Deze specifieke vorm van de metriek komt inderdaad overeen met degene die we zagen in 2.87, waar dit zelfs de exacte metriek is en er geen hogere orde correcties meer aan te pas komen. Het blijkt [16] echter dat dit, net zoals in  $D = 4$ , ook bruikbaar is voor massabepaling van niet-Schwarzschild zwarte gaten.

De metriek van een interessante oplossing<sup>13</sup> (Cf. 2.142) blijkt deze te zijn

$$ds_E^2 = - \frac{1}{[f^{(D)}(1 + k^{(D)})]^{\frac{D-3}{D-2}}} dt^2 + [f^{(D)}(1 + k^{(D)})]^{\frac{1}{D-2}} d\vec{x}^2 \quad (2.91)$$

waarbij geldt

---

<sup>13</sup>Dit is de dimensionaal gereduceerde Einsteinmetriek van een oplossing die  $D1$ -en  $D5$ -branen bevat, en ook nog momentum. In de sectie over het vijfdimensionale extremaal zwart gat wordt hier veel dieper op ingegaan. Hier wordt deze er al even bijgenomen om zo een concreet resultaat te bekomen dat later nog van pas zal komen.

$$f^{(D)} = 1 + \frac{c_p^{(D)}}{|\vec{r}|^{D-3}} \quad (2.92)$$

Indien we  $k^{(D)} = 0$  stellen, kunnen we op zoek gaan naar de coëfficiënt  $c_p^{(D)}$ . Daartoe berekenen we eerst de  $g_{00}$  component, meer bepaald het gedrag op oneindig

$$g_{00} \sim \frac{D-3}{D-2} \frac{c_p^{(D)}}{|\vec{r}|^{D-3}} \quad (2.93)$$

Vergelijking van 2.89 en 2.93 levert ons dan een waarde voor  $c_p^{(D)}$

$$\begin{aligned} \frac{D-3}{D-2} \frac{c_p^{(D)}}{|\vec{r}|^{D-3}} &= \frac{16\pi G_N^{(D)}}{(D-2)\omega_{D-2}} \frac{M}{r^{D-3}} \\ &\Downarrow \\ c_p^{(D)} &= \frac{16\pi G_N^{(D)} M}{\omega_{D-2}(D-3)} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Op deze manier hebben we nu een concrete uitdrukking voor de coëfficiënt  $c_p^{(D)}$ .

### 2.4.2 Massabepaling met U-dualiteit

Dualiteiten geven ons de kans om op een intuïtieve manier massa's van verschillende objecten met elkaar te relateren [9]. De eerste massa die we graag willen weten is die van de  $D1$ -braan. Deze massa duikt op in 2.94 en is bovendien een logisch vertrekpunt.

S-dualiteit is de eerste dualiteit die ons een interessante piste oplevert om dit te bepalen. S-dualiteit laat de massa's die gemeten worden in Einsteinframe 2.21 invariant. Maar, het blijkt nuttig om te werken in een lichtjes aangepaste Einsteinmetriek [9]

$$\tilde{g} = \exp\left[-\frac{(\phi - \phi_\infty)}{2}\right] G = g_s^{1/2} g \quad (2.95)$$

Hierbij is  $g$  de oude Einsteinmetriek,  $\tilde{g}$  de nieuwe, en  $G$  is de stringframe metriek. (De indices  $\mu\nu$  zijn hier onderdrukt.) Dit heeft als gevolg voor de massa's gemeten in de verschillende frames:

$$M = g_s^{1/4} \tilde{M} \quad (2.96)$$

Ons startpunt is de minimummassa van een gewonden snaar ( $w = 1$ ). Deze kunnen we aflezen uit 2.53 en deze is

$$M_F = \frac{R}{\alpha'} = \frac{R_9}{\alpha'} \quad (2.97)$$

Waarbij we nog veronderstellen dat de snaar gewonden is om de  $X^9$  coördinaat. De minimum-massa ten gevolge van een KK-mode is analoog

$$M_K = \frac{1}{R_9} \quad (2.98)$$

Met behulp van S-dualiteit kunnen we nu de massa van de  $D$ -snaar bepalen. De massa in Einsteinmetriek blijft constant, dus geldt er

$$\begin{aligned} M &= g_s^{1/4} \tilde{M} \\ M' &= g_s'^{1/4} \tilde{M}' \\ M &= M' \end{aligned} \quad (2.99)$$

Dit uitwerken, met de betrekking 2.72, geeft ons dan

$$\begin{aligned} M &= g_s^{1/4} \frac{R_9}{\alpha'} = g_s'^{1/4} \tilde{M}' \\ \tilde{M}' &= \left( \frac{g_s}{g_s'} \right)^{1/4} \frac{R_9}{\alpha'} \\ \tilde{M}' &= \frac{1}{\sqrt{g_s'}} \frac{R_9'}{\sqrt{g_s'} \alpha'} = \frac{R_9}{g_s \alpha'} = M_{D1} \end{aligned} \quad (2.100)$$

In de laatste regel werd ook de verandering in  $R_9$  ten gevolge van de S-dualiteit 2.72 toegepast. Nu we de massaformule hebben voor een  $D1$ -braan, kunnen we van hieruit met behulp van T-dualiteit de massa's afleiden van alle andere soorten branen. Indien we T-dualiteit toepassen (2.71) langs een richting die transversaal staat op  $X^9$ , verkrijgen vanuit de  $D$ -snaar een  $D2$ -braan met massa

$$M = \frac{R_9}{g_s \alpha'} = \frac{R_9 R_8'}{g_s' \alpha' \sqrt{\alpha'}} \quad (2.101)$$

En op deze manier kunnen we de minimummassa van eender welke  $D$ -braan vinden

$$M_{Dp} = \frac{R_{10-p} \dots R_9}{g_s \alpha'^{(p+1)/2}} \quad (2.102)$$

### 2.4.3 Coëfficiënten bepalen

De bepaling van de coëfficiënten, kan met behulp van de vorige sectie en het toepassen van de betrekkingen gevonden uit de ADM-massa 2.74. Wij zijn uiteraard geïnteresseerd in de relevante coëfficiënten voor het vijfdimensionaal zwart gat. Laat ons beginnen met  $c_1^{(5)}$ .

$$\begin{aligned} c_1^{(d)} &= \frac{16\pi G_N^{(d)}}{\omega_{(d-2)}(d-3)} M_{D1} \\ c_1^{(5)} &= \frac{16\pi G_N^{(5)}}{\omega_3 2} M_{D1} \end{aligned} \quad (2.103)$$

we maken gebruik van

$$\omega_3 = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2 \quad (2.104)$$

en na invullen van de  $D1$ -braanmassa 2.100 verkrijgen we

$$\begin{aligned} c_1^{(5)} &= \frac{8\pi G_N^{(5)}}{2\pi^2} \cdot \frac{R_9}{\alpha' g} \\ &= \frac{4G_N^{(5)} R_9}{\pi \alpha' g} \end{aligned} \quad (2.105)$$

De coëfficiënt  $c_p^{(5)}$ , de impulsmode, is nu ook eenvoudig te bepalen. Men dient enkel de minimummassa te vervangen door  $1/R_9$  en dan leest men

$$c_p^{(5)} = \frac{4G_N^{(5)}}{\pi R_9} \quad (2.106)$$

Rest ons nog de berekening van  $c_5^{(5)}$

$$c_5^{(5)} = \frac{4G_N^{(5)}}{\pi} \frac{R_9 R_8 R_7 R_6 R_5}{g(\alpha')^3} \quad (2.107)$$

Dit lijkt op het eerste zicht een behoorlijk onpraktische formule. Om uit deze impasse te ontsnappen, bekijken we  $G_N^{(5)}$  van naderbij. Dit is de Newtonconstante in 5 dimensies. De verhouding tussen  $G_N$ 's in verschillende dimensies is eenvoudig, men dient enkel een volumefactor in rekening te brengen

$$G_N^{(d)} = \frac{G_N^{(10)}}{(2\pi)^{10-d} V_{10-d}} \quad (2.108)$$



waarin  $(2\pi)^{(10-d)}V_{10-d}$  het volume van de gecomcompactificeerde ruimte voorstelt. Merk hierbij op dat de factoren  $2\pi$  niet inbegrepen zijn in de definitie  $V = R_5R_6R_7R_8$ , de factor  $V$  stelt hier dus simpelweg een product van de compactificatiestralen voor en niet het volledige volume. De volgende stap is het uitschrijven van  $G_N^{(10)}$  in termen van  $l_s = \sqrt{\alpha'}$  en  $g_s$ . Om dit te bereiken, kunnen we op verschillende manieren te werk gaan.

**Optie 1:**  $G_N^{(10)}$  via  $c_5^{(5)}$

De eerste manier is allicht de eenvoudigste. Hiervoor steunen we op een expliciet resultaat voor  $c_5^{(5)}$ . Door de verschillende coëfficiënten met elkaar in verband te brengen hebben we, afgezien van dit ene resultaat, enkel maar betrekkingen nodig die we rechtstreeks vanuit T-dualiteit kunnen bepalen. We beginnen bij het herschrijven van 2.94

$$\begin{aligned} G_N^{(d)} &= \frac{1}{16\pi} \omega_{d-2}(d-3) \frac{c_p^{(d)}}{M_{Dp}} \\ 16\pi G_N^{(10)} &= \omega_{d-2}(d-3) \frac{c_p^{(d)}}{M_{Dp}} V_{10-d} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Kiezen we nu  $d = 5$  en  $p = 5$  dan vinden we

$$\begin{aligned} 16\pi G_N^{(10)} &= (2\pi)^2 \frac{c_5^{(5)}}{M_{D5}} V_5 \\ &= (2\pi)^2 \frac{c_5^{(5)}}{T_{D5}} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Nu vestigen we onze aandacht even op de spanningen van de  $D$ -branen. De spanning wordt eenvoudig gedefinieerd als de verhouding tussen energie (massa) en volume van de braan [2] [7]

$$T_p = \frac{M_p}{V_p(2\pi)^p} \quad (2.111)$$

T-dualiteit laat ons vervolgens toe om een verband te vinden tussen de verschillende  $D$ -braan spanningen, we dienen enkel het effect van 2.71 op de massa's en de volumes te volgen

$$\begin{aligned} \frac{T_{p-1}}{T_p} &= \frac{M_{p-1}}{M_p} \frac{V_p}{V_{p-1}} \\ &= 2\pi R \frac{M_{p-1}}{M_p} \\ &= \frac{(\alpha')^{1/2}}{R} 2\pi R \\ &= 2\pi \alpha'^{1/2} \end{aligned} \quad (2.112)$$

waarbij  $R$  een van de compactificatiestralen is. Op deze manier geeft T-dualiteit een verband tussen de verschillende  $D$ -braan spanningen. Nu kunnen we ons terug concentreren op het herschrijven van  $G_N^{(10)}$ , met behulp van 2.112 vinden we

$$\begin{aligned} 16\pi G_N^{(10)} &= (2\pi)^2 (2\pi)^4 (\alpha')^2 \frac{1}{T_{D1}} c_5^{(5)} \\ &= (2\pi)^6 (\alpha')^2 (2\pi) (\alpha') g c_5^{(5)} \end{aligned} \quad (2.113)$$

Waarbij in de laatste regel  $T_{D1}$  expliciet werd uitgewerkt. In [19] werd bekomen dat  $c_{NS5}^{(5)} = \alpha'$ . Wat betekent dit dan voor  $c_{D5}^{(5)}$ ? De massa 2.102 van een  $D5$ -braan is

$$M_{D5} = \frac{R_9 R_8 R_7 R_6 R_5}{g(\alpha')^3} \quad (2.114)$$

Hieruit kunnen we afleiden dat voor de  $NS5$ -braan geldt (de procedure verloopt volledig analoog aan wat we reeds toepasten in 2.100)

$$M_{NS5} = \frac{R_9 R_8 R_7 R_6 R_5}{g^2(\alpha')^3} = \frac{M_{D5}}{g} \quad (2.115)$$

en dat geeft ons dan  $c_{D5}^{(5)} = g\alpha'$ . Dit invullen in 2.113 geeft ons dan

$$16\pi G_N^{(10)} = (2\pi)^7 (\alpha')^4 g^2 \quad (2.116)$$

als finale resultaat.

## Optie 2: $G_N^{(10)}$ uit de Einstein-Hilbert actie

$G_N^{(10)}$  is ook af te leiden uit de actie in Einstein-Hilbertvorm

$$S \sim \frac{1}{16\pi G_N^{(10)}} \int d^{10}X \sqrt{-g} R \quad (2.117)$$

de procedure bestaat erin om de uitwisseling van een gesloten snaar tussen twee parallele  $D$ -branen expliciet uit te werken. De twee branen voelen elkaars aanwezigheid door gravitatie, en dit proces kan zowel in de snaartheorie als in de effectieve veldentheorie worden uitgerekend. Vergelijking van beide resultaten geeft uiteindelijk het expliciete resultaat. Dit is allesbehalve triviaal<sup>14</sup>.

---

<sup>14</sup>Dit wordt in enig detail uitgewerkt in [7] (in hoofdstuk 8) en in [20] (in hoofdstuk 6). Voor een meer pedagogischere behandeling, cf. [21]

Het uiteindelijke resultaat voor  $G_N^{(10)}$  is

$$\begin{aligned} 16\pi G_N^{(10)} &= (2\pi)^7 g_s^2 \alpha'^4 \\ &= (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8 \end{aligned} \quad (2.118)$$

En dus in overeenstemming met ons resultaat 2.116 op basis van  $c_5^{(5)}$ .

## Resultaten

Bij wijze van laatste controle kan  $c_5^{(5)}$  met de  $G_N^{(10)}$  expliciet worden uitgewerkt

$$\begin{aligned} c_5^{(5)} &= G_N^{(10)} \frac{1}{(2\pi)^5 V_5} \frac{4}{\pi} \frac{V_5}{g \alpha'^3} \\ &= G_N^{(10)} \frac{1}{2^3 \pi^6 g \alpha'^3} \\ &= \frac{(2\pi)^7 g_s^2 \alpha'^4}{2^3 \pi^6 g \alpha'^3} \\ &= g \alpha' \end{aligned} \quad (2.119)$$

wat consistent is met het resultaat gevonden in [19]. Deze  $c_5^{(5)}$  vormt dan samen met

$$\begin{aligned} c_1^{(5)} &= \frac{4G_N^{(5)} R_9}{\pi \alpha' g} \\ c_p^{(5)} &= \frac{4G_N^{(5)}}{\pi R_9} \end{aligned} \quad (2.120)$$

alle coëfficiënten die relevant zullen zijn voor het vijfdimensionale zwart gat. Nu we hierover beschikken, kunnen we onze aandacht richten op de eigenlijke constructie van een goed model voor het vijfdimensionale zwarte gat.

## 2.5 Vijfdimensionaal zwart gat

Om een zwart gat te modelleren dat enigszins lijkt op een fysisch zwart gat, kunnen we niet zomaar eender welke combinatie van branen gebruiken. De meeste oplossingen lijden aan problemen [9] zoals een divergente scalar (dilaton naar oneindig op de horizon).

Het komt erop neer om een goede combinatie van verschillende soorten branen te zoeken die elkaar precies in evenwicht houden aan de horizon, om zo een zwart gat te bouwen dat een niet triviale oppervlakte heeft.

Het vijfdimensionale zwart gat kunnen we modelleren [9] [22] door het superponeren van

- $Q_5$   $D5$ -branen
- $Q_1$   $D1$ -branen
- $N$  kwanta momentum

De theorie waarin we ons bevinden is IIB, en we compactificeren op  $\mathbf{T}^5$ . De  $D5$ -branen worden gewonden rond de compacte dimensies. Vervolgens worden de  $D1$ -branen ( $D$ -snaren) ook gewonden rond 1 dimensie van de  $\mathbf{T}^5$ , laat ons zeggen  $X^9$ . Tot slot plaatsen we nog momentum  $P_9 = \frac{N}{R_9}$  op de  $D1$ -braan, dus ook in dimensie  $X^9$ . Branen die zo gewonden worden rond een compacte dimensie, zullen een puntdeeltje worden in  $d$  dimensionale ruimtetijd (en hier opteren we voor  $d = 5$ ). Het is dat puntdeeltje dat het zwart gat modelleert.

Net zoals eerder wordt de oplossing beschreven door drie harmonische functies ( $f_1, f_5$  en  $k$ ), die elk corresponderen met een bouwsteen van het zwart gat.

### 2.5.1 Extremaal geval

De oplossing [9] [22] van de actie is (in tien dimensies en in *stringframe* metriek)

$$\begin{aligned}
ds_{str}^2 &= f_1^{-1/2} f_5^{-1/2} (-dt^2 + dX_9^2 + k(dt - dX_9)^2) \\
&\quad + f_1^{1/2} f_5^{1/2} (dX_1^2 + \dots + dX_4^2) \\
&\quad + f_1^{1/2} f_5^{-1/2} (dX_5^2 + \dots + dX_8^2) \\
e^{-2(\phi_{10} - \phi_\infty)} &= f_5 f_1^{-1} \\
B'_{09} &= \frac{1}{2}(f_1^{-1} - 1) \\
H'_{ijk} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} \partial_l f_5 \quad \text{met } i, j, k, l = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Hierbij is  $\epsilon_{ijkl}$  het Levi-Civita symbool. De ruimtelijke dimensies waarin zich geen braan bevindt zijn  $X_1, \dots, X_4$ , die samen met de  $t$  als tijdsdimensie de vijf dimensies zijn waarin we werken. De harmonische functies worden

$$\begin{aligned}
f_1 &= 1 + \frac{c_1^{(5)} Q_1}{X^2} \\
f_5 &= 1 + \frac{c_5^{(5)} Q_1}{X^2} \\
k &= \frac{c_P^{(5)} N}{X^2}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

waarbij

$$X^2 = X_1^2 + \dots + X_4^2 \tag{2.123}$$

De coëfficiënten zijn degenen die we reeds bepaald hebben in subsectie 2.4.3.  $Q_1$ ,  $Q_5$  en  $N$  zijn “ladingen” die respectievelijk het aantal  $D1$ -branen,  $D5$ -branen en momentum tellen.

### Dimensionale reductie

De volgende stap bestaat erin om 2.121 dimensionaal te reduceren.

Om het proces van dimensionale reductie uit te leggen [23], grijpen we terug naar een iets eenvoudiger toymodel, dat slechts één type braan bevat, namelijk  $D1$ -braan.

Laat ons beginnen met de standaardoplossing in stringframe

$$ds_{str}^2 = f_1^{-1/2}(-dt^2 + dX_9^2) + f_1^{1/2}(dX_1^2 + \dots + dX_8^2) \quad (2.124)$$

met bijhorend tiendimensionaal dilaton

$$\begin{aligned} e^{-2\phi_{10}} &= f_1^{\frac{p-3}{2}} \\ &= f_1^{-1} \end{aligned} \quad (2.125)$$

Vervolgens compactificeren we de dimensies  $X_5, \dots, X_8$  en ook  $X_9$ , dit geeft dan de oplossing in vijf dimensies

$$ds_{str}^2 = -f_1^{-1/2} dt^2 + f_1^{1/2}(dX_1^2 + \dots + dX_4^2) \quad (2.126)$$

Het dilaton krijgt een bijdrage vanwege het gecompactificeerde volume

$$\begin{aligned} e^{-2\phi_5} &= e^{-2\phi_{10}\sqrt{G_{comp}}} \\ &= f_1^{-1} \cdot \left( (f_1^{-1/2})(f_1^{1/2})^4 \right)^{1/2} \\ &= f_1^{-1} \left( f_1^{3/2} \right)^{1/2} \\ &= f_1^{-1/4} \end{aligned} \quad (2.127)$$

Dan schakelen we nu over naar Einsteinframe 2.21, om de eigenschappen van het zwart gat te kunnen bespreken.

$$g^{(5)} = e^{\frac{-4\phi_5}{3}} G_N^{(5)} \quad (2.128)$$

Dit, samen met het nieuwe dilaton 2.127, geeft dan uiteindelijk de componenten van de metriek

in Einsteinframe. De  $g_{00}$  component is dan

$$\begin{aligned}
g_{00} &= e^{\frac{-4\phi_5}{3}} f_1^{-1/2} \\
&= e^{(-2\phi_5)\frac{2}{3}} f_1^{-1/2} \\
&= (f_1^{-1/4})^{2/3} f_1^{-1/2} \\
&= f_1^{-2/3}
\end{aligned} \tag{2.129}$$

en analoog verkrijgen we voor de ruimtelijke componenten ( $a, b = 1, 2, 3, 4$ )

$$\begin{aligned}
g_{ab} &= e^{\frac{-4\phi_5}{3}} f_1^{1/2} \\
&= f_1^{1/3}
\end{aligned} \tag{2.130}$$

De uiteindelijke oplossing van dit toymodel met enkel een  $D1$ -braan wordt dan

$$ds_E^2 = f_1^{-2/3} dt^2 + f_1^{1/3} (dX_1^2 + \dots + dX_4^2) \tag{2.131}$$

Indien we te maken hebben met een  $D5$ -braan, is ons uitgangspunt de oplossing

$$\begin{aligned}
ds_{str}^2 &= f_5^{-1/2} (-dt^2 + dX_9^2 + \dots + dX_5^2) + f_5^{1/2} (dX_1^2 + \dots + dX_4^2) \\
e^{-2\phi_{10}} &= f_5^{\frac{p-3}{2}} = f_5
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Het vijfdimensionaal dilaton wordt in dit geval

$$\begin{aligned}
e^{-2\phi_5} &= f_5 \cdot \left( (f_5^{-1/2})^5 \right)^{1/2} \\
&= f_5^{-1/4}
\end{aligned} \tag{2.133}$$

En vanaf dit punt verloopt de procedure compleet analoog aan het  $D1$ -geval. De dimensionaal gereduceerde metriek van de  $D5$ -oplossing neemt uiteindelijk ook de vorm 2.131 aan en wordt

$$ds_E^2 = f_5^{-2/3} dt^2 + f_5^{1/3} (dX_1^2 + \dots + dX_4^2) \tag{2.134}$$

Voor het momentum liggen de zaken iets subtieler. Ons uitgangspunt is nu volgende metriek

$$ds_{str}^2 = -dt^2 + dX_9^2 + k(dt - dX_9)^2 + dX_1^2 + \dots + dX_8^2 \tag{2.135}$$

Onze oorspronkelijke reductieprocedure zal aangepast moeten worden, gezien er nu ook een “gemengde” term ( $\sim dt dX_9$ ) opduikt, iets dat voorheen niet van toepassing was. De uitweg blijkt hier om terug te kijken naar de Kaluza-Klein Ansatz 2.30, en expliciet de verschillende componenten te identificeren. Indien we de metriek verder uitschrijven

$$ds_{str}^2 = (k - 1) dt^2 + (k + 1) dX_9^2 - 2k dt dX_9 + \dots \quad (2.136)$$

kunnen we  $e^{2\sigma}$  al direct identificeren als de component die bij  $X_9^2$  staat.

$$e^{2\sigma} = k + 1 \quad (2.137)$$

De coëfficiënt bij  $dt dX_9$  is  $2e^{2\sigma} A_\mu$ , hieruit kunnen we  $A_\mu$  bepalen

$$\begin{aligned} 2e^{2\sigma} A_\mu &= -2k \\ A_\mu &= -\frac{k}{k + 1} \end{aligned} \quad (2.138)$$

De  $g_{00}$  component van de dimensionaal gereduceerde metriek wordt dan

$$\begin{aligned} g_{00} &= (k - 1) - \frac{k^2}{k + 1} \\ &= \frac{-1}{k + 1} \end{aligned} \quad (2.139)$$

Alle componenten krijgen, net zoals in het  $D1$ -en  $D5$ -geval, nog een bijdrage van het gecom-  
pactificeerd volume

$$e^{-2\phi_5} = (1 + k)^{1/2} = (1 + k)^{1/2} \quad (2.140)$$

en omzetting naar het Einsteinframe levert dan tenslotte

$$g_{ab} = e^{(-2\phi_5)\frac{2}{3}} = (1 + k)^{1/3} \quad (2.141)$$

De uiteindelijke gereduceerde metriek van de momentumoplossing wordt zo

$$ds_E^2 = (1 + k)^{-2/3} dt^2 + (1 + k)^{1/3} (dX_1^2 + \dots + dX_4^2)$$

Nu we bij alle afzonderlijke componenten de dimensionale reductie bestudeerd hebben, richten we onze aandacht op het algemene geval. Indien we een  $D1$ ,  $D5$  en momentum superponeren,

ziet de oplossing er zo uit

$$ds_E^2 = \frac{1}{(f_1 f_5 (1+k))^{\frac{2}{3}}} dt^2 + (f_1 f_5 (1+k))^{\frac{1}{3}} (\delta_{ab} dX^a dX^b) \quad (2.142)$$

Met  $a, b = 1, \dots, 4$ . Deze metriek herkennen we als een vijfdimensionaal, extremaal Reissner-Nordström zwart gat [9]. De oppervlakte van dit zwart gat zal een driedimensionaal hyperoppervlak zijn, oftewel een standaard volumeberekening van een sfeer. Om dit beter te zien, voeren we de notatie

$$\lambda \equiv f_1 f_5 (1+k) \quad (2.143)$$

in, en herschrijven we de metriek 2.142

$$\begin{aligned} ds_E^2 &= \lambda^{-2/3} dt^2 + \lambda^{1/3} (\delta_{ab} dX^a dX^b) \\ &= \lambda^{-2/3} dt^2 + \lambda^{1/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \end{aligned} \quad (2.144)$$

### Horizonoppervlakte

Als we dan het deel van de metriek  $g_{\mu\nu}$  dat bij de angulaire coördinaten staat afzonderen en hernoemen naar  $g'_{\mu\nu}$ , kunnen we de oppervlakte schrijven [24] als

$$\begin{aligned} A_5 &= \int \sqrt{\det g'} d\Omega_3 \\ &= \int \left( (r^2 \lambda^{1/3})^3 \right)^{1/2} d\Omega_3 \\ &= \int r^3 \lambda^{1/2} d\Omega_3 \\ &= r^3 \lambda^{1/2} \omega_3 \\ &= r^3 \lambda^{1/2} 2\pi^2 \end{aligned} \quad (2.145)$$

Waarbij we in de laatste regel 2.104 toepasten. Als we vervolgens de harmonische functies 2.122 invullen

$$\begin{aligned} A_5 &= r^3 2\pi^2 \left[ \left(1 + \frac{c_1^{(5)} Q_1}{X^2}\right) \left(1 + \frac{c_5^{(5)} Q_1}{X^2}\right) \left(1 + \frac{c_P^{(5)} N}{X^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\pi^2 \left[ (r^2 + c_1^{(5)} Q_1) (r^2 + c_5^{(5)} Q_5) (r^2 + c_P^{(5)} N) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.146)$$

Nu hebben we het oppervlak van het zwart gat bij een straal  $r$ . Om de *horizonoppervlakte* te krijgen, moeten we gaan kijken bij straal  $r = 0$



$$A_{BH,5} = 2\pi^2 \sqrt{(c_1^{(5)} Q_1)(c_5^{(5)} Q_5)(c_P^{(5)} N)} \quad (2.147)$$

Vervolgens vullen we de coëfficiënten 2.119 en 2.120 in

$$\begin{aligned} A_{BH,5} &= 2\pi^2 \sqrt{Q_1 Q_5 N} \sqrt{c_1^{(5)} c_5^{(5)} c_P^{(5)}} \\ &= 2\pi^2 \sqrt{Q_1 Q_5 N} \sqrt{\frac{4G_N^{(5)} R_9}{\pi \alpha' g} \cdot g \alpha' \cdot \frac{4G_N^{(5)}}{\pi R_9}} \\ &= 2\pi^2 \sqrt{Q_1 Q_5 N} \frac{4G_N^{(5)}}{\pi} \end{aligned} \quad (2.148)$$

Dit geeft uiteindelijk voor de entropie

$$S = \frac{A_{BH,5}}{4G_N^{(5)}} = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 N} \quad (2.149)$$

Dit is dan de entropie voor het vijfdimensionale zwart gat dat we hier gemodelleerd hebben. Belangrijk is om in te zien dat de entropie enkel en alleen afhangt van de ladingen  $Q_1$ ,  $Q_5$  en  $N$ , en niet van andere dimensionale constanten en andere continue parameters. Dit laat ons toe om de gevonden entropie daadwerkelijk te beschouwen als een maat voor het aantal toestanden van het gevonden  $D$ -braan systeem.

Waarom werkt deze configuratie van branen? In andere gevallen krijgt men dikwijls horizonoppervlaktes die 0 zijn, en dit heeft alles te maken met pathologisch gedrag van de scalars (i.e. het dilaton) op  $\infty$  of op de horizon en dat zorgt voor problemen. De keuze voor dit specifieke systeem ( $D1$ ,  $D5$  en  $N$ ) is dus absoluut niet willekeurig, en in het algemeen komt het modelleren van een zwart gat met behulp van branen er in de praktijk op neer om de scalars tegenover elkaar correct te balanceren om zo een niet-triviale oplossing te verkrijgen.

Als we even terugkijken naar de formule van het dilaton 2.125, dan zien we

$$e^{2\phi_{10}} = f_1^{\frac{1-3}{2}} f_5^{\frac{5-3}{2}} \quad (2.150)$$

Waaruit we dan kunnen zien, uiteraard indien de ladingen gelijkgesteld worden, er tenminste de mogelijkheid bestaat dat het dilaton stabiel blijft. Dit verklaart de aanwezigheid van de  $N$  momentumkwanta evenwel nog niet.

Een manier waarop men intuïtief de noodzaak kan zien [23] voor de momentum is door zich te realiseren dat een superpositie van  $D1$  en  $D5$ -branen toch nog steeds een horizonoppervlakte

$A_5 = 0$  oplevert. Dit kan geïnterpreteerd worden als de grondtoestand van het zwart gat in kwestie, met dus geen *degeneracy of states*. Als er dan nog momentum wordt toegevoegd, krijgt men dan een zwart gat met  $A_5 \neq 0$ , zoals gewenst, het toevoegen van het momentum is dus te zien als het creëren van een geëxciteerde toestand.

### Geldigheid

Deze sugra oplossing is niet in eender welk regime geldig. Indien we een constant compactificatievolume veronderstellen ( $\mathbf{T}^5$ ), dan willen we dat de correcties aan de geometrie ten gevolge van de snaar klein blijven [13] [25]. Dus deze eis wordt dan

$$c_1^{(5)} Q_1, c_5^{(5)} Q_5, c_P^{(5)} N \gg l_s = \sqrt{\alpha'} \quad (2.151)$$

Deze voorwaarden garanderen ons een zwart gat met een horizon die veel groter is dan  $l_s$ . Dit is een logische eis, we willen een microscopische beschrijving (met snaren en branen) van een macroscopisch zwart gat, waar we dan de thermodynamische eigenschappen van kunnen onderzoeken.

Anderzijds willen we dat de klassieke oplossing ook geldt op het niveau van de kwantummechanica, die eis betekent dan weer  $g_s \rightarrow 0$ . Gezien geldt:

$$\begin{aligned} c_1^{(5)} Q_1 &\sim g_s \\ c_5^{(5)} Q_5 &\sim g_s \\ c_P^{(5)} N &\sim g_s^2 \end{aligned} \quad (2.152)$$

volgt hieruit

$$g_s Q_1 \gg 1 \quad g_s Q_5 \gg 1 \quad g_s^2 N \gg 1 \quad (2.153)$$

Waaruit we dan nogmaals kunnen afleiden dat voor de onderliggende hiërarchie geldt

$$N \gg Q_1 \sim Q_5 \gg 1 \quad (2.154)$$

Samengevat, om een zinnige oplossing die een zwart gat voorstelt te krijgen, hebben we zeer veel branen nodig.

## Gedrag onder U-dualiteit

Een andere eigenschap van 2.149 is de invariantie onder U-dualiteit<sup>15</sup>. Deze invariantie is van groot belang [24], niet alleen voor de geldigheid van de oplossing, maar de inwisselbaarheid van de verschillende parameters laat ons ook toe om bepaalde procedures te veralgemenen. In de volgende paragraaf zullen we dit meteen al toepassen.

Om duidelijk in te zien hoe de ladingen  $(N, Q_1, Q_5)$  in elkaar omgezet worden, laat ons een transformatie [26] [27]

$$U = T_6 T_7 T_8 T_9 S T_5 T_6 \quad (2.155)$$

beschouwen. Deze zal  $(N, Q_1, Q_5)$  omzetten naar  $(Q_5, N, Q_1)$ . Om de gedachten te vestigen, onze startsituatie is de volgende

- $D_{56789}$ , een  $D5$ -braan in de  $X^5 \dots X^9$  richtingen
- $D_5$ , een  $D1$ -braan in de  $X^5$  richting
- $p_5$ , momentum in de  $X^5$  richting

Nu schrijven we een “dualiteitsketting” op [14], we starten met  $p_5$

$$p_5 \xrightarrow{T_6} p_5 \xrightarrow{T_5} F_5 \xrightarrow{S} D_5 \xrightarrow{T_9 T_8 T_7 T_6} D_{56789} \quad (2.156)$$

En we zien dus dat het originele momentum in de  $X^5$  richting is omgezet naar een  $D5$ -braan, dit impliceert  $N \rightarrow Q_5$ . Voor de  $D1$ -braan kunnen we analoog te werk gaan.

$$D_5 \xrightarrow{T_6} D_{65} \xrightarrow{T_5} D_6 \xrightarrow{S} F_6 \xrightarrow{T_9 T_8 T_7} F_6 \xrightarrow{T_6} D_6 \quad (2.157)$$

en tot slot voor de  $D5$ -braan

$$D_{56789} \xrightarrow{T_6} D_{5789} \xrightarrow{T_5} D_{789} \xrightarrow{S} D_{789} \xrightarrow{T_9 T_8 T_7} D_\emptyset \xrightarrow{T_6} D_6 \quad (2.158)$$

waarbij  $D_\emptyset$  voor een  $D0$ -braan staat.

### 2.5.2 Nonextremaal geval

De oplossing in het niet-extremaal geval is iets subtieler van constructie<sup>16</sup>. Men begint met een algemeen Reissner-Nordström zwart gat D.4, in vijf dimensies

<sup>15</sup>Dit is de samengestelde groep van T- en S-dualiteiten, de “U” staat voor “unified”.

<sup>16</sup>Voor een uitgebreide analyse cf. [26], voor een introductie cf. [13]

$$ds^2 = -\lambda dt^2 + \frac{1}{\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 \quad (2.159)$$

met

$$\lambda = \left(1 - \frac{r_+^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_-^2}{r^2}\right) \quad (2.160)$$

De constructie van een niet-extremale versie met willekeurige ladingen van deze metriek begint bij het toevoegen van extra dimensies. Dit wordt soms ook wel een *lift* [13] genoemd, en is exact het omgekeerde van een dimensionale reductie. De volgende stap bestaat erin een manier te vinden om de constraints op de ladingen van het zwart gat op te heffen.

De simpelste manier hiervoor is het boosten langs de richting van de  $D1$ -braan. Dit is equivalent met het introduceren van extra momentum in deze richting. De  $Q_1$  en  $Q_5$  lading blijft dan behouden, maar de  $N$ , dat het momentum in de richting van het  $D1$ -braan weergeeft, kan dan arbitraire waarden aannemen.

Deze procedure is ook toepasbaar voor het verkrijgen van arbitraire  $Q_1$  of  $Q_5$  ladingen, gezien de drie kenmerkende ladingen van het zwart gat verbonden zijn middels U-dualiteitstransformaties (Cf. subsectie 2.5.1). Om bijvoorbeeld een willekeurige  $Q_5$  lading te bekomen, volstaat het om via dualiteit  $Q_1$  om te zetten naar  $N$ , vervolgens te boosten en daarna de nieuwe  $N$  terug te converteren naar  $Q_1$ . Op deze manier is het duidelijk dat alle ladingen door middel van boosts arbitraire waarden kunnen aannemen. De oplossing in stringframe luidt<sup>17</sup> [9]

$$\begin{aligned} ds_{str}^2 = & \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \alpha\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \beta\right)^{-1/2} \left[-dt^2 + dX_9^2 + \frac{r_0^2}{r^2} (\cosh \gamma dt + \sinh \gamma dX_9)^2\right] \\ & + \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \alpha\right)^{1/2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \beta\right)^{-1/2} \left[dX_5^2 + \dots + dX_8^2\right] \\ & + \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \alpha\right)^{1/2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \beta\right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2\right] \end{aligned} \quad (2.161)$$

De volgende stap ligt voor de hand nu we over een tiendimensionaal zwart gat beschikken met arbitraire ladingen, gaan we dimensionale reductie toepassen om nogmaals een vijfdimensionaal zwart gat te bekomen.

$$ds_5^2 = -\frac{1}{\lambda^{2/3}} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) dt^2 + \lambda^{1/3} \left[\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2\right] \quad (2.162)$$

waarbij dan

---

<sup>17</sup>Voor een afleiding van deze oplossing cf. [28].

$$\lambda = \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \alpha\right) \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \beta\right) \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \gamma\right) \quad (2.163)$$

Deze oplossing is manifest invariant onder permutaties van de boostparameters, zoals we reeds konden verwachten vanwege de U-dualiteitstransformaties die de betekenis van deze parameters omwisselt.

Laat ons nu de aandacht vestigen op de thermodynamische grootheden die verbonden zijn aan deze oplossing. Deze zijn overigens dezelfde in het vijfdimensionale als in het tiendimensionale geval.

### Horizonoppervlakte en entropie

Om de oppervlakte te bepalen, kijken we terug naar 2.145, gezien 2.162 formeel gelijk is aan 2.142 geldt hier

$$A_{BH,5} = 2\pi^2 r^3 \lambda^{1/2} \Big|_{r=r_0} \quad (2.164)$$

Indien we dan expliciet  $\lambda$  uitwerken

$$\begin{aligned} A_{BH,5} &= 2\pi^2 \left( (r_0^2 + r_0^2 \sinh^2 \alpha)(r_0^2 + r_0^2 \sinh^2 \beta)(r_0^2 + r_0^2 \sinh^2 \gamma) \right)^{1/2} \\ &= 2\pi^2 r_0^3 \cosh \alpha \cosh \beta \cosh \gamma \end{aligned} \quad (2.165)$$

De vijfdimensionale  $G_N$  is

$$G_N^5 = \frac{G_N^{10}}{V_{compact}} = G_N^{10} \cdot \frac{1}{(2\pi)^5 RV} = \frac{8\pi^6 g^2 \alpha'^4}{(2\pi)^5 RV} \quad (2.166)$$

Waarbij we reeds ?? invulden. Uiteindelijk geeft dit voor de entropie 2.149

$$\begin{aligned} S &= 2\pi^2 r_0^3 \cosh \alpha \cosh \beta \cosh \gamma \frac{(2\pi)^5 RV}{8\pi^6 g^2 \alpha'^4} \\ &= \frac{2\pi r_0^3 RV}{g^2 \alpha'^4} \cosh \alpha \cosh \beta \cosh \gamma \end{aligned} \quad (2.167)$$

Deze entropie is, zoals gewenst, invariant onder permutatie van de boostparameters (ten gevolge van de invariantie onder U-dualiteit).

## Massa van het zwart gat

Als tweede voorbeeld van een grootheid die verbonden is aan het zwart gat, gaan we de massa van het zwart gat bespreken. Net zoals eerder (2.89) gaan we voor de massa te bepalen gebruik maken van de  $g_{00}$  component van de metriek.

$$g_{00} \sim \frac{16\pi G_N^d M}{3\omega_3 r^2} \quad (2.168)$$

Wat dan voor de massa van een vijfdimensionaal gat ons het volgende verband levert

$$M = \frac{3\pi r^2 g_{00}}{8G_N^5} \quad (2.169)$$

Laat ons beginnen met het uitschrijven van de  $g_{00}$  component. Uit 2.162 en 2.163 volgt

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\lambda^{-2/3} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left( \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \alpha\right) \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \beta\right) \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \gamma\right) \right)^{-2/3} \\ &\sim \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \alpha\right) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \beta\right) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0^2}{r^2} \sinh^2 \gamma\right) \\ &\sim \frac{r_0^2}{3r^2} \left(2 \sinh^2 \alpha + 2 \sinh^2 \beta + 2 \sinh^2 \gamma + 3\right) \\ &\sim \frac{r_0^2}{3r^2} (\cosh 2\alpha + \cosh 2\beta + \cosh 2\gamma) \end{aligned} \quad (2.170)$$

Waarbij we op de laatste regel gebruik hebben gemaakt van de identiteit

$$2 \sinh^2 \theta + 1 = \cosh 2\theta \quad (2.171)$$

Dit invullen in de formule voor de massa geeft ons dan

$$\begin{aligned} M &= \frac{3\pi r^2}{8G_N^5} \cdot \frac{r_0^2}{3r^2} (\cosh 2\alpha + \cosh 2\beta + \cosh 2\gamma) \\ &= \frac{RV r_0^2}{2g^2} (\cosh 2\alpha + \cosh 2\beta + \cosh 2\gamma) \end{aligned} \quad (2.172)$$

als massa voor het zwart gat. Ook hier zien we weer de invariantie onder permutatie van de boostparameters.

## Hoofdstuk 3

# *D*-braan model

### 3.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk hebben we ons toegespitst op het zwart gat als een bepaalde oplossing van sugra. Het modelleren van een zwart gat in die context gebeurde op het niveau van de metriek. Er werd een braanoplossing voorgesteld, die hebben we geverifieerd als een oplossing van de sugra-actie en vervolgens hebben we verschillende van die oplossingen gesuperponeerd. Het doel van deze superpositie was het verkrijgen van een oplossing die een realistisch zwart gat zo dicht mogelijk benadert.

Dat recept leverde ons uiteindelijk (cf. 2.142) een metriek op die in een bepaalde limiet reduceerde tot een vijfdimensionale Reissner-Nordström-oplossing. Van deze metriek werden vervolgens verschillende thermodynamische grootheden berekend, zowel in het extremale als in het niet-extremale geval. Concreet ging het om de massa en de entropie.

Een zwart gat is een thermodynamisch object in die zin dat er bepaalde wetten bestaan met betrekking tot zwarte gaten die analoog lopen met de hoofdwetten van de thermodynamica. De studie van deze wetten staat bekend onder de weinig verrassende naam *black hole thermodynamics*. [8] De wet die de entropie relateert aan de horizonoppervlakte van een zwart gat pasten we in subsectie 2.5.1 reeds toe. In dit hoofdstuk benaderen we het probleem van de andere kant, we gaan proberen om de entropie uit een rechtstreekse telling van het aantal microtoestanden van het zwart gat te bepalen.

Het feit dat een zwart gat een entropie heeft, impliceert dat het zwart gat bestaat uit meerdere microtoestanden. Het grote probleem is echter dat een microscopische beschrijving van een zwart gat vooralsnog niet bekend is. Snaartheorie, een kandidaat voor kwantumzwaartekrachtstheorie, kan dus maar beter degelijke voorspellingen opleveren als het gaat om de microscopische opbouw van een zwart gat. In die zin is een zwart gat de ideale omgeving om een kandidaat-kwantumzwaartekrachtstheorie op de proef te stellen. Enerzijds zijn er enkele thermodynamische wetten bekend, die toelaten om eigenschappen van het zwart gat te bepalen. Anderzijds is er de microscopische kant van de zaak. Indien we een microscopisch model van een zwart gat con-

strueren en er vervolgens mee aan de slag gaan in de context van statistische fysica, moeten we uiteraard resultaten bekomen die consistent zijn met de wetten uit de *black hole thermodynamics*.

Het construeren van zo'n microscopische beschrijving van het zwart gat wordt het eerste doel van dit hoofdstuk. Vervolgens beschouwen we vanuit het standpunt van snaartheorie de statistische fysica, we gaan verifiëren of de microscopische beschrijving resultaten levert die consistent zijn met de eerder gevonden relaties bekomen langs macroscopische (sugra) weg. In eerste instantie doen we dit in het extremale geval (in sectie 3.2) waar we vooral onze aandacht zullen richten op het tellen van de vrijheidsgraden om zo uiteindelijk aan de entropie te komen.

In de laatste sectie van dit hoofdstuk (3.3) behandelen we het niet-extremale geval. Hier stellen we vast dat ons model in staat is om een zwart gat fenomeen (namelijk Hawkingstraling) te reproduceren. Onze nadruk in deze sectie zal dan ook liggen op het tot stand komen van deze Hawkingstraling in ons  $D$ -braan model.

Echter, we beginnen dit hoofdstuk met de sugra-oplossing nogmaals te analyseren en kijken of we reeds een hint kunnen krijgen hoe zo'n microscopisch model van een zwart gat eruit kan zien. Deze analyse zal uitwijzen dat  $D$ -branen als bouwstenen van een zwart gat een interessante denkpiste zijn, vandaar trouwens ook de term *constituent brane model*.

### 3.1.1 Constituent brane model

Vooraleer we echt van start gaan met statistisch onderzoek van het microscopisch model van het zwart gat, laat ons eerst eens terugblikken op het resultaat van het vorige hoofdstuk en bekijken of we reeds in staat zijn om af te leiden wat de microscopische bouwstenen van het daar gevonden zwart gat zijn, op basis van een formele (ad hoc) analyse [9]

Uiteraard verwachten we een zwart gat opgebouwd uit  $D$ -branen, onze oplossing is immers begonnen als een superpositie van verschillende braanoplossingen. Vervolgens hebben we echter verschillende boosts uitgevoerd, om zo in een algemener geval uit te komen. De vraag is nu: kunnen we onze oplossing nog altijd zien als opgebouwd uit verschillende van die branen? Dit is zeer wenselijk, omdat we dan een eerste indicatie hebben dat deze interpretatie steek houdt en dat nader onderzoek vanuit het oogpunt van snaartheorie tenminste kans op slagen heeft.

Laat ons beginnen bij het herhalen van de massa's van onze bouwstenen, zoals berekend in subsectie 2.4.2



$$\begin{aligned}
M_{D1} &= \frac{R}{g} \\
M_{D5} &= \frac{RV}{g} \\
M_P &= \frac{1}{R}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Waarbij de factoren  $2\pi$  niet inbegrepen zijn in de definitie van  $V$ , dat hier simpelweg een product van de compactificatiestralen  $V = R_5 R_6 R_7 R_8$  is, terwijl  $R = R_9$  de straal van de cirkel  $\mathbf{S}^1$  voorstelt. Bij wijze van voorbeeld gaan we dieper in op het geval van de  $D1$ -braan, de rest verloopt analoog.

In de extremale metriek zagen we de  $D1$ -braan opduiken in de harmonische functie 2.122 van de vorm

$$f_1 = 1 + \frac{c_1^{(5)} Q_1}{r^2} \tag{3.2}$$

In het niet-extremale geval 2.163 is dit vervangen door

$$\tilde{f}_1 = 1 + \frac{r_0^2 \sinh^2 \alpha}{r^2} \tag{3.3}$$

Deze twee moeten, tenminste in de extremale limiet [29] ( $r_0 \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ ) overeenkomen

$$r_0^2 \sinh^2 \alpha \approx c_1^{(5)} Q_1 \tag{3.4}$$

Het extremale geval kan vereenvoudigd worden als volgt<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
c_1^{(5)} Q_1 &= \frac{4G_N^{(5)} R}{\pi g} Q_1 \\
&= \frac{4\pi g^2 R}{\pi g 4RV} Q_1 \\
&= \frac{g}{V} Q_1
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Wat dan geeft

---

<sup>1</sup>In wat volgt stellen we  $\alpha' = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{g}{V}Q_1 &\approx r_0^2 \sinh^2 \alpha \\
\frac{g}{V}Q_1 &\approx \frac{r_0^2}{2} \sinh 2\alpha \\
&\downarrow \\
Q_1 &= \frac{Vr_0^2}{g} \sinh 2\alpha
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Waarbij in de tweede regel volgende benadering van  $\sinh^2 \alpha$  werd toegepast [29]

$$\begin{aligned}
\sinh^2 \alpha &= \sinh \alpha \sinh \alpha \\
&\approx \sinh \alpha \cosh \alpha \\
&\approx \frac{\sinh 2\alpha}{2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Hierbij werd gebruikt dat  $\cosh \alpha \approx \sinh \alpha$  bij  $\alpha \rightarrow \infty$ . Deze waarde voor  $Q_1$  blijkt de correcte te zijn. De andere ladingen kunnen op een volledig analoge manier bepaald worden en zijn

$$\begin{aligned}
Q_5 &= \frac{r_0^2}{2g} \sinh 2\beta \\
N &= \frac{R^2 V r_0^2}{2g^2} \sinh 2\gamma
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Deze ladingen werden eerder al geïnterpreteerd als het aantal branen van die soort. Die interpretatie zetten we door, wetende dat dit hier niet noodzakelijk een geheel getal moet zijn. De ladingen worden zo parameters, die in bepaalde limieten zich herleiden tot het aantal branen van elke soort. De niet-extremale oplossing kan op deze manier geformuleerd worden in termen van een nieuwe set van 6 parameters:  $N_1$ ,  $N_5$ ,  $N_L$  en hun tegenhangers voor de antibranen. De bekomen oplossing kan dus beschouwd worden als opgebouwd uit een welbepaalde combinatie branen en antibranen. Deze worden bekomen door de eerder de eerder gevonden massa of entropie van het zwart gat “na te maken” met een systeem dat bestaat uit niet-interagerende<sup>2</sup> branen en antibranen. Deze aantallen definiëren [9] [22] we dan als volgt:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{Vr_0^2}{4g} e^{2\alpha} \quad , \quad \bar{N}_1 = \frac{Vr_0^2}{4g} e^{-2\alpha} \\
N_5 &= \frac{r_0^2}{4g} e^{2\beta} \quad , \quad \bar{N}_5 = \frac{r_0^2}{4g} e^{-2\beta} \\
N_L &= \frac{R^2 V r_0^2}{4g^2} e^{2\gamma} \quad , \quad \bar{N}_L = \frac{R^2 V r_0^2}{4g^2} e^{-2\gamma}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

---

<sup>2</sup>Niet-interagerend betekent hier dat de massa gewoon gelijk is aan de som van de massa's van de constituenten.

Met deze definitie van de aantallen, krijgen we voor de ladingen

$$\begin{aligned} Q_1 &= N_1 - \bar{N}_1 \\ Q_5 &= N_5 - \bar{N}_5 \\ N &= N_L - N_R \end{aligned} \tag{3.10}$$

De massaformule<sup>3</sup> 2.172 wordt nu herleid tot

$$E = \frac{R}{g}(N_1 + \bar{N}_1) + \frac{RV}{g}(N_5 + \bar{N}_5) + \frac{1}{R}(N_R + N_L) \tag{3.11}$$

En de entropie 2.167 wordt uiteindelijk

$$S = 2\pi \left( \sqrt{N_1} + \sqrt{\bar{N}_1} \right) \left( \sqrt{N_5} + \sqrt{\bar{N}_5} \right) \left( \sqrt{N_L} + \sqrt{N_R} \right) \tag{3.12}$$

Op deze manier zien we dat de entropie in dit systeem enkel afhangt van de aantallen van de branen die het zwart gat vormen. Dit model schijnt wel degelijk compatibel te zijn met onze eerdere analyse en geeft ook een mooie formule voor de entropie in termen van de bouwstenen.

Merk op dat om de entropie 2.149 van het extremale zwart gat te bekomen er antibranen of branen aanwezig moeten zijn, maar niet beide tegelijk. Idem dito voor het momentum, een extremaal zwart gat bevat linkslopend of rechtslopend momentum, maar niet beide.

In het vorige hoofdstuk begonnen we van de sugra-actie, die  $p$ -braanoplossingen toelaat. Superpositie van die oplossingen gaf ons uiteindelijk een metriek van een vijfdimensionaal zwart gat. In deze paragraaf zijn we er in geslaagd om deze sugra-oplossing anders te interpreteren.

Ons uitgangspunt waren hier de bestanddelen (de branen) met verschillende gekende eigenschappen en als we dan “aantallen” (3.9) postuleerden, zijn we erin geslaagd om de oplossingen van het vorige hoofdstuk opnieuw te bekomen. Ditmaal echter geparametriseerd met de aantallen van de constituenten. Bij deze formele analyse hadden we de sugra-oplossing uiteraard al stevig in ons achterhoofd, maar het feit dat deze interpretatie überhaupt mogelijk is, motiveert ons om via snaartheorie te werk te gaan en daar een model te bouwen dat bestaat uit verschillende branen.

Uiteindelijk willen we weten wat de microtoestanden zijn die aan de grondslag liggen van de entropie 3.12 van ons systeem. Om dit te bereiken, richten we onze aandacht in de volgende twee secties op de constructie van een  $D$ -braanmodel van een zwart gat in snaartheorie.

---

<sup>3</sup>In het geval van een algemene Reissner-Nordström oplossing ( $\alpha = \beta = \gamma$ ) zullen de bijdragen van 1-branen, 5-branen en momentum allen gelijk worden.

## 3.2 Extremaal zwart gat

### 3.2.1 Het model

Gemotiveerd door voorgaande analyse, richten we onze aandacht wederom op de studie van het zwart gat in vijf dimensies, ditmaal vanuit het standpunt van snaartheorie.

We beschouwen type IIB theorie, gecompactificeerd op

$$\mathbf{T}^5 = \mathbf{T}^4 \times \mathbf{S}^1 \tag{3.13}$$

En onze ingrediënten zijn nogmaals

- $Q_5$   $D5$ -branen, gewonden rond de volledige  $\mathbf{T}^5$
- $Q_1$   $D1$ -branen, gewonden rond de  $\mathbf{S}^1$
- $N$  kwanta van  $1/R_9$  momentum, rond  $\mathbf{S}^1$

De entropie zal uiteindelijk voortkomen uit het feit dat als vele  $D$ -branen samenvallen, er heel veel massaloze toestanden zullen zijn, die afkomstig zijn van snaren met eindpunten op verschillende branen.

Het momentum kan niet afkomstig zijn van branen die zelf bewegen, zij zijn immers boostinvariant in richtingen parallel aan zichzelf. De  $D$ -braan excitaties die verantwoordelijk zijn voor dit momentum blijkt beschreven te worden door open snaren met eindpunten op de branen [14] [20]. We hebben keuze uit (1,5), (5,1), (1,1) en (5,5) snaren. Deze snaren zullen we aanslagen, om ze op die manier momentum te laten dragen.

Het blijkt dat we op die manier soms massa geven aan de snaren, het komt er dus op neer om een manier te vinden om zo veel mogelijk snaren massaloos te houden, want die configuratie zal de hoogste entropie dragen. We analyseren nu de eigenschappen van de (5,1) en (1,5) snaren. We willen namelijk weten of deze snaren überhaupt aanleiding kunnen geven tot zulke massaloze toestanden. Meer bepaald vestigen we onze aandacht op de ordeningsconstanten, die aanleiding geven tot de vacuümenergie. De (1,5) en (5,1) snaren verdienen onze bijzondere aandacht, omdat zij over snaarcoördinaten beschikken met zowel Neumann als Dirichletrandvoorwaarden.

#### De vacuümenergie

We gaan nu verifiëren of de vacuümenergie van de (5,1) en (1,5) snaren wel degelijk nul kan worden en dus of er massaloze excitaties mogelijk zijn bij deze snaren.

We beschouwen een  $Dp$  en een  $Dq$  braan [4] en achteraf zullen we pas terugkoppelen naar ons  $D1/D5$  systeem. Stel, we hebben een open snaar tussen de  $Dp$  en  $Dq$  braan. De verschillende coördinaten van de snaar zullen aan verschillende randvoorwaarden moeten voldoen. We splitsen de snaarcoördinaten op naargelang hun randvoorwaarden.

$$\begin{aligned}
\underbrace{X^0 \dots X^q}_{NN} &\equiv X^i \\
\underbrace{X^{q+1} \dots X^p}_{ND} &\equiv X^m \\
\underbrace{X^{p+1} \dots X^d}_{DD} &\equiv X^a
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Waarbij D staat voor Dirichlet(randvoorwaarde) en N voor Neumann(randvoorwaarde). De expliciete formule [4] voor de  $X^m$  is

$$X^m(\tau, \sigma) = x_q^r + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}} \frac{2}{n} \alpha_{\frac{n}{2}}^r e^{-i\frac{n}{2}\tau} \cos\left(\frac{n}{2}\sigma\right) \tag{3.15}$$

We zijn geïnteresseerd in de vacuümenergie van deze snaar. Gezien we een massaloze excitatie willen, willen we dat deze vacuümenergie nul is. De vacuümenergie is de energie die de snaar draagt indien ze niet aangeslagen is, en wordt dus volledig bepaald door de ordeningsconstante. Voor gewone bosonische snaar weten we dat

$$a_B = -\frac{1}{24} \tag{3.16}$$

Wat dus voor 24 transversale richtingen  $a = -1$  oplevert zoals reeds besproken ter hoogte van 1.39. Om de ordeningsconstante van de ND-component van de snaar uit te rekenen, vertrekken we vanuit de commutatierelatie

$$\left[ \alpha_{\frac{r}{2}}^r, \alpha_{\frac{s}{2}}^s \right] = \frac{m}{2} \delta^{rs} \delta_{m+n,0} \tag{3.17}$$

Bij het berekenen van het  $M^2$  van deze snaar, zullen we termen krijgen van de vorm

$$\frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r \tag{3.18}$$

Het zijn die termen, die na normale ordening<sup>4</sup> aanleiding geven tot de ordeningsconstante (afkomstig uit de commutatierelatie 3.17) in de massaterm. Gezien deze specifieke vorm eigen

---

<sup>4</sup>Normale ordening of Wick ordening betekent in de context van kwantumveldentheorie dat de creatieoperatoren links staan van de annihilatieoperatoren in het product.

is aan de ND-coördinaten van de snaar, is het dus mogelijk dat de ordeningsconstante van deze richtingen zal verschillen van die van de andere richtingen.

$$\frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}^+} \alpha_{-\frac{m}{2}}^r \alpha_{\frac{m}{2}}^r + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}^+} [\alpha_{\frac{m}{2}}^r, \alpha_{-\frac{m}{2}}^r] \quad (3.19)$$

Waarbij de tweede term aanleiding zal geven tot de ordeningsconstante, indien de commutator 3.17 wordt uitgewerkt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}^+} [\alpha_{\frac{m}{2}}^r, \alpha_{-\frac{m}{2}}^r] &= \frac{1}{4}(p-q) \sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}^+} m \\ &= \frac{1}{48}(p-q) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Waarbij in de laatste regel nog wordt gebruikt dat

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12} &= \sum_0^\infty n = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}^+} n + \sum_{n \in \mathbb{Z}_{even}^+} n = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}^+} n + 2 \sum_0^\infty n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_{odd}^+} n - \frac{2}{12} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Waaruit dan de identiteit  $\sum_{m \in \mathbb{Z}_{odd}^+} m = 1/12$  onmiddellijk volgt. In een tiendimensionale theorie geldt dus voor de ordeningsconstante, afkomstig van de bosonische sector

$$a = -\frac{1}{24}(8 - (p - q)) + \frac{1}{48}(p - q) \quad (3.22)$$

En indien geldt  $p - q = 4$ , zoals in het  $D1/D5$  systeem

$$a_b = 4 \left( -\frac{1}{24} + \frac{1}{48} \right) \quad (3.23)$$

Bij de fermionen maken we een onderscheid tussen de fermionen in de Ramond sector, en de fermionen in de Neveu-Schwarz sector. Hun bijdrage (per dimensie) aan de ordeningsconstante [7] is de volgende:

$$\begin{aligned} a_R &= \frac{1}{24} \\ a_{NS} &= -\frac{1}{48} \end{aligned} \quad (3.24)$$

De wereldblad fermionen in de ND-richting zullen R-type kwantisatie condities hebben [9], dus

verkrijgen we

$$\begin{aligned}
 a_f &= -\frac{1}{48}(8 - (p - q)) + (p - q)\frac{1}{24} \\
 &= 4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{48}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

De bijdrage van de wereldblad fermionen zal die van de bosonen exact annuleren.

### Intermezzo: over sectoren

Om extra duidelijkheid te scheppen in verband met de zonet uitgevoerde berekening, laat ons even een overzicht geven van de verschillende ordeningsconstanten. We beginnen met de bosonische sector.

	NN	DD	ND
$X_i$	$-\frac{1}{24}$ (P)	$-\frac{1}{24}$ (P)	$\frac{1}{48}$ (AP)

Waarbij (A)P staat voor (anti)periodiek. In de fermionische sector moeten we het onderscheid maken tussen de Ramond-sector en de Neveu-Schwarz-sector.

	NN	DD	ND
$\psi_{Ramond}$	$\frac{1}{24}$ (P)	$\frac{1}{24}$ (P)	$-\frac{1}{48}$ (AP)
$\psi_{Neveu-Schwarz}$	$-\frac{1}{48}$ (AP)	$-\frac{1}{48}$ (AP)	$\frac{1}{24}$ (P)

Het opvallendste feit zit hier in de ND-coördinaten. Dikwijls vindt men in handboeken de volgende vuistregel terug: *de R-sector heeft periodieke randvoorwaarden, de NS-sector antiperiodieke*. Dit geldt echter alleen maar in het geval van periodieke bosonen. Indien we te maken hebben met antiperiodieke bosonen, draait de definitie net om. Dit om te waarborgen dat men in de R-sector steeds een verdwijnende vacuümenergie heeft. Meer dus dan “periodiek” of “antiperiodiek” is die manifest verdwijnende vacuümenergie de definiërende eigenschap van de R-sector.

Verder valt op dat het  $D1/D5$  systeem dus extra bijzonder is, door het feit  $p - q = 4$  ook de NS-sector over een verdwijnende vacuümenergie beschikt.

### Aantal toestanden

Het aantal toestanden dat voortkomt uit deze (1,5) en (5,1) snaren is

- $4Q_1Q_5$  uit de bosonische sector
- $4Q_1Q_5$  uit de fermionische sector

Het feit dat deze twee gelijk zijn, is een rechtstreekse eis van supersymmetrie. De voorfactor 4 kan intuïtief begrepen worden. We zijn op zoek naar de lage-energie excitaties van ons systeem. We nemen volgende situatie aan voor de compactificatiestralen

$$R_9 > R_i \quad \text{met} \quad i = 5, 6, 7, 8 \quad (3.26)$$

In dat geval hebben we voor de effectieve theorie een  $(1 + 1)$  dimensionale theorie die leeft op  $X_9$ . De laagste modes hebben dan vier polarisaties, in plaats van acht [29]. De excitaties van de  $D1$ -braan die worden gevormd door snaren die gepolariseerd zijn in de macroscopische richtingen  $(X^1 \dots X^4)$  zullen niet massaloos zijn, gezien zij een verplaatsing van de  $D1$ -braan modelleren. De excitaties in de interne richtingen, transversaal op de  $D1$ -braan  $(X^5, \dots, X^8)$  zijn daarentegen massaloos.

Deze eerste telling van microtoestanden kan nog op minder heuristische manieren uitgevoerd worden. Een eerste, intuïtieve manier maakt gebruik van een zogenaamde *effectieve snaar*, een ander, eenvoudiger systeem, dat bij nader onderzoek blijkt equivalent te zijn aan het onze. Deze aanpak is redelijk eenvoudig te visualiseren en biedt een elegante interpretatie van het geheel. Hier gaan we in detail op in in subsectie 3.2.2.

We kunnen ook rigoureuzer te werk gaan en expliciet de supersymmetrische ijktheorie die leeft op de branen bespreken, dit doen we in subsectie 3.2.3. Deze bespreking houden we zo kort mogelijk en we zullen ons toespitsen op het aspect dat ons het meest aanbelangt, namelijk het aantal vrijheidsgraden in de theorie.

De telling van vrijheidsgraden alleen is natuurlijk nog niet voldoende, wij zijn immers op zoek naar de entropie. Het blijkt dat het aantal vrijheidsgraden en het excitatieniveau van het systeem gerelateerd kunnen worden aan de entropie. Deze overgang vormt het thema van subsectie 3.2.4.

### 3.2.2 Effectieve snaar benadering

De eerste andere optie om het aantal vrijheidsgraden af te leiden, is door het systeem anders te interpreteren en gebruik te maken van een zogenaamde *effectieve snaar* [30].

#### *NS1/P* systeem

Een eerste stap in het opbouwen van deze redenering is kijken naar het geval van een gewonden, fundamentele snaar ( $NS1$  of  $F$ ) plus momentum volgens een bepaalde richting, stel  $X^9$ . Laat ons die dimensie compactificeren naar een cirkel  $\mathbf{S}^1$ , met straal  $R$ .

In eerste instantie bestaat ons systeem uit  $n_1$  snaren en  $n_p$  momentumkwanta. Laat ons nu de snaren samenkomen, om zo een equivalente configuratie te maken van één, lange, gewonden snaar, die bovendien ook dat momentum bezit. Deze configuratie van de lange snaar wordt beschreven door volgende kwantumgetallen



$$\begin{aligned} n_1 &\rightarrow n_w \\ n_p &\rightarrow n_p \end{aligned} \tag{3.27}$$

Het aantal snaren wordt dus geherinterpreteerd als het windingsgetal van de lange snaar. Wat het momentum betreft, dat kan verdeeld worden over de verschillende eigenfrequenties van de snaar. Er zijn dus veel opties waarop dit kan gebeuren, en dit geeft aanleiding tot veel verschillende, equivalente toestanden.

De totale lengte van de snaar is

$$L_T = n_1 L \tag{3.28}$$

met

$$L = 2\pi R \tag{3.29}$$

Indien we kijken naar een kwantum van eigenfrequentie  $k$ , zien we dat elk kwantum

$$p_k = \frac{2\pi k}{L_T} \tag{3.30}$$

momentum vertegenwoordigt. Het totale momentum aanwezig in ons systeem is

$$p = \frac{2\pi n_p}{L} \tag{3.31}$$

Waarbij  $L$  wel degelijk de lengte van één omwenteling is. De kwanta  $n_p$  zijn immers daaraan gerelateerd. Indien we dit herformuleren naar onze nieuwe interpretatie van één lange snaar krijgen we

$$p = \frac{2\pi n_p n_1}{L_T} \tag{3.32}$$

De microtoestanden die aan de basis liggen van de entropie van dit systeem zijn afkomstig van alle mogelijke partities van het totale excitatieniveau van  $n_1 n_p$  van de lange snaar.

### ***D1/D5* systeem**

Om de stap te maken naar het relevantere *D1/D5* systeem, laat ons even de ruimtetijd in kwestie specificeren

$$\mathbf{R}_{1,9} \rightarrow \mathbf{R}_{1,4} \times \mathbf{T}^4 \times \mathbf{S}^1 \quad (3.33)$$

Waarbij we ook veronderstellen dat de  $\mathbf{T}^4$  veel kleinere compactificatieradii heeft dan de  $\mathbf{S}^1$ . De fundamentele snaren zijn gewonden rond  $\mathbf{S}^1$  en het momentum is eveneens in die richting georiënteerd. Via T-en S-dualiteit kunnen we dit systeem nu converteren naar een  $D1/D5$  systeem. Een eerste stap is om S-dualiteit te gebruiken.

$$NS1/P \xrightarrow{S} D1/P \xrightarrow{T_{6789}} D5/P \quad (3.34)$$

De S-dualiteit verwisselt de fundamentele snaar met zijn sterk gekoppelde alter ego, de  $D1$ -braan. Vervolgens is T-dualiseren in de juiste richtingen voldoende om hier een  $D5$ -braan van te maken. Nu wordt het iets subtieler.

$$D5/P \xrightarrow{S} NS5/P \xrightarrow{T_5} NS5/NS1 \xrightarrow{T_6} NS5/NS1 \quad (3.35)$$

Via S-dualiteit maken we van de  $D5$ -braan even een  $NS5$ -braan. Dan kunnen we de T-dualiteit toepassen om het momentum om te zetten naar een fundamentele snaar. Vervolgens passen we nog éénmaal T-dualiteit toe om wederom in een IIB theorie terecht te komen<sup>5</sup>. Tot slot

$$NS5/NS1 \xrightarrow{S} D5/D1 \quad (3.36)$$

Nu we deze equivalentie hebben, gaan we de implicaties hiervan onderzoeken. In het  $NS1/P$  systeem, weten we dat een momentummode

$$p_1 = \frac{2\pi}{L} \quad (3.37)$$

als kwanta heeft. Als we nu kijken naar een momentummode van een systeem van  $n_1$   $NS1$ -branen (oftewel, doodgewone snaren), die samengevoegd zijn tot 1 lange snaar, dan zien we dat de kwanta aangepast worden

$$p_{n_1} = \frac{2\pi}{Ln_1} = \frac{p_1}{n_1} \quad (3.38)$$

De momenta worden dan gekwantiseerd volgens  $\frac{1}{n_1}$  van een gewone momentummode. Vandaar dat men soms spreekt van *fractionele* eenheden. Deze analogie kunnen we doortrekken naar het

---

<sup>5</sup>T-dualiteit toepassen geeft steeds een overgang tussen een IIA en IIB theorie. Voor een uitgebreidere behandeling van de hier uitgevoerde dualiteitsketting, cf. [31]

scenario van de  $D1/D5$  situatie.

Indien een  $D1$ -braan gebonden is aan  $n_5$   $D5$ -branen, dan zal (wat de momentumkwanta op de  $D1$ -braan betreft) er ook een fractionering optreden. De aanwezigheid van  $n_5$   $D5$ -branen, zorgt dus voor een snaar met effectieve lengte  $n_5 L$ . Als er daarnaast ook nog eens  $n_1$   $D1$ -branen aanwezig zijn, zullen we te maken krijgen met een *effectieve snaar* met lengte

$$L_{eff} = n_1 n_5 L \quad (3.39)$$

Deze  $n_1 n_5$  kan beschouwd worden als een windingsgetal van de effectieve snaar.

### $D1/D5/P$ systeem

Er rest ons nog een laatste stap, namelijk het toevoegen van momentum aan het  $D1/D5$  systeem. Dit is eenvoudig te bereiken. We beschikken reeds over een effectieve snaar met lengte  $n_1 n_5 L$ , de procedure om deze te voorzien van momentum is analoog aan wat we reeds deden in het  $NS1/P$  systeem, met dan de effectieve snaar die de plaats inneemt van de  $NS1$ -braan.

$$n_1 n_p \rightarrow n_{eff} n_p = n'_1 n'_5 n_p \quad (3.40)$$

Wat betreft het aantal modes, we kunnen ons voorstellen dat de  $D1$ -branen kunnen bewegen in de  $D5$ -branen. Dit levert ons 4 bosonische en (door supersymmetrie) dus ook 4 fermionische modes op. Het totale excitatieniveau van de snaar is dus, in analogie met 3.32,  $n'_1 n'_5 n_p$ .

### 3.2.3 De ijktheorie

Deze benadering steunt op de studie van de laag energetische theorie die tot stand komt in het  $D1/D5$  systeem. In het algemeen geldt dat we bij een samengesteld systeem bestaande uit  $Q$   $Dp$ -branen, we een  $p+1$ -dimensionale supersymmetrische ijktheorie vinden met ijkgroep  $U(Q)$ .

Een theorie met verschillende soorten branen geeft nog steeds aanleiding tot een ijktheorie, maar geeft ook aanleiding tot extra materievelden, afkomstig uit zogenaamde *hypermultiplets*. In wat volgt bespreken we de ijktheorie die tot stand zal komen in ons  $D1/D5$  systeem.

### Inleiding

De lage energie theorie zal een  $(1 + 1)$  dimensionale theorie zijn, die leeft op  $X^9$ , waarbij de  $D5$ -braan reeds leeft in compacte dimensies (dus de situatie in 3.26). Deze theorie zal beschikken over  $(4, 4)$  supersymmetrie. Dit is dezelfde hoeveelheid supersymmetrie als een  $(N = 2)$  theorie in vier dimensies of een  $(N = 1)$  theorie in zes dimensies.

We beginnen met een T-dualiteitstransformatie

$$\begin{array}{ccc} D1 & \xrightarrow{T} & D5 \\ D5 & & D9 \end{array} \quad (3.41)$$

Nu hebben we een zesdimensionale theorie, die leeft op de  $D5$ -braan. Qua indices nemen we de volgende conventies aan

$$\begin{array}{ll} \alpha, \beta = 0, 9, 1, 2, 3, 4 & \text{Richtingen parallel aan de } D5\text{-braan} \\ i, j = 5, 6, 7, 8 & \text{Richtingen transversaal op de } D5\text{-braan} \\ \mu, \nu = 0, \dots, 9 & \text{Alle richtingen} \end{array} \quad (3.42)$$

Ons systeem wordt beschreven door een ( $N = 1$ ) supersymmetrische theorie in zes dimensies.

### Field content

Om uiteindelijk de entropie te bepalen, moeten we het aantal vrijheidsgraden in de theorie weten. Om de telling voldoende te funderen, gaan we eerst in detail in op de field content<sup>6</sup> in de laag energetische effectieve ijktheorie. In deze bespreking volgen we het parcours van [33], [34] en [25].

De velden afkomstig van de massaloze excitaties van de (1,1) snaren, kunnen bekomen worden door dimensionale reductie van  $U(Q_1)$ , ( $N = 1$ ) supersymmetrische Yang Mills van tien dimensies naar twee (1 + 1) dimensies. De bosonische velden kunnen we dan sorteren in de typische multiplets van ( $N = 2$ ) theorie, namelijk

$$\begin{array}{ll} \text{Vector multiplet :} & A_0^{(1)}, A_9^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \phi_3^{(1)}, \phi_4^{(1)} \\ \text{Hyper multiplet :} & Y_5^{(1)}, Y_6^{(1)}, Y_7^{(1)}, Y_8^{(1)} \end{array} \quad (3.43)$$

De hypermultiplets kunnen nog gecombineerd worden tot een doublet van de  $SU(2)_R$  symmetrie van de theorie

$$\begin{aligned} N_{a\bar{a}}^{(1)} &= \begin{pmatrix} N_{1,(a\bar{a})}^{(1)} \\ N_{2,(a\bar{a})}^{(1)\dagger} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_{8(a\bar{a})}^{(1)} + iY_{7(a\bar{a})}^{(1)} \\ Y_{6(a\bar{a})}^{(1)} - iY_{5(a\bar{a})}^{(1)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Waarbij voor de indices geldt

---

<sup>6</sup>Cf. appendix C voor een extreem beknopte inleiding omtrent de verschillende multiplets in een supersymmetrische theorie. Voor een uitgebreide introductie, cf. [32].

$$a, \bar{a} = 1, \dots, Q_1 \quad (3.45)$$

De interpretatie van deze velden is de volgende

- $A_0^{(1)}, A_9^{(1)}$  zijn de  $U(Q_1)$  ijkvelden in de niet-compacte dimensies.
- De  $Y^{(1)}$ 's en de  $\phi^{(1)}$ 's zijn de ijkvelden in de compacte dimensies van de oorspronkelijke tien dimensionale supersymmetrische Yang-Mills theorie.

Alle velden zijn hermitische  $Q_1 \times Q_1$  matrices en transformeren als toegevoegde representatie van  $U(Q_1)$ .

Bij de (5,5) snaren vinden we opnieuw een  $U(Q_5)$  theorie in (1+1) dimensies. Men zou kunnen denken dat we een 5 + 1 dimensionale theorie verkrijgen, maar we negeren de  $\mathbf{T}^4$ , die we zeer compact veronderstellen [25]. De field content in dit geval is dan ook volledig analoog aan degene afkomstig van de (1,1) snaren

$$\begin{aligned} \text{Vector multiplet : } & A_0^{(5)}, A_9^{(5)}, \phi_1^{(5)}, \phi_2^{(5)}, \phi_3^{(5)}, \phi_4^{(5)} \\ \text{Hyper multiplet : } & Y_5^{(5)}, Y_6^{(5)}, Y_7^{(5)}, Y_8^{(5)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

en net hetzelfde als bij de (1,1)-snaren kunnen ook hier de hypermultiplets geordend worden in een  $SU(2)_R$  doublet:

$$\begin{aligned} N_{b\bar{b}}^{(5)} &= \begin{pmatrix} N_{1,(b\bar{b})}^{(5)} \\ N_{2,(b\bar{b})}^{(5)\dagger} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_{8(b\bar{b})}^{(5)} + iY_{7(b\bar{b})}^{(5)} \\ Y_{6(b\bar{b})}^{(5)} - iY_{5(b\bar{b})}^{(5)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Waarbij voor de indices geldt

$$b, \bar{b} = 1, \dots, Q_5 \quad (3.48)$$

Alle velden zijn hier hermitische  $Q_5 \times Q_5$  matrices en transformeren als toegevoegde representatie van  $U(Q_5)$ .

Tenslotte vinden we bij de (1,5) en (5,1) snaren het volgende  $SU(2)_R$  doublet, dat ook weer bestaat uit 2 hypermultiplets

$$\chi_{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} A_{a\bar{b}} \\ B_{a\bar{b}}^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Zij transformeren als *bi-fundamentals* van  $U(Q_1) \times U(Q_5)$ .

De volledige ijktheorie is een  $(1 + 1)$  dimensionale,  $(4, 4)$  supersymmetrische ijktheorie met als ijkgroep  $U(Q_1) \times U(Q_5)$ . De materievelden in deze theorie zijn de hypermultiplets  $Y^{(1)}$  en  $Y^{(5)}$  die transformeren als toegevoegde van  $U(Q_1)$  en  $U(Q_5)$  respectievelijk. Verder zijn er nog de hypermultiplets  $\chi$ , die transformeren als bi-fundamentals van  $U(Q_1) \times U(Q_5)$ .

### Vrijheidsgraden

De  $D1/D5$  gebonden toestand, wordt beschreven door de zogenaamde *Higgs-branch* van de laag energetische supersymmetrische ijktheorie. Dit komt neer op het geven van een *vev*<sup>7</sup> aan de hypermultiplets, wat zorgt dat de vectormultiplets een massa verwerven. Dit is een veralgemening van het Higgsmechanisme in klassieke veldentheorie.

De vectormultiplet scalars  $\phi_i$  stellen de relatieve afstanden tussen de verschillende branen voor en gezien onze configuratie samenvallende branen beschrijft, moet hun vev dus wel degelijk verdwijnen.

We zijn geïnteresseerd in de meest stabiele toestand, en dit komt ook neer op het nul stellen van de superpotentiaal. In de praktijk komt dit neer op verdwijnende *D-terms*. Dat soort condities staat in de literatuur [35] [36] ook bekend als een *D-flatness condition*. Elk van de ijkgroepen geeft aanleiding tot een set van zo'n *D-flatness conditions*, expliciet uitgeschreven worden deze voor  $U(Q_1)$

$$\begin{aligned} A_{a\bar{b}}A_{a'\bar{b}}^* - B_{b\bar{a}'}B_{b\bar{a}}^* + [N_1^{(1)}, N_1^{(1)\dagger}]_{a\bar{a}'} - [N_2^{(1)}, N_2^{(1)\dagger}]_{a\bar{a}'} &= 0 \\ A_{a\bar{b}}B_{b\bar{a}'} + [N_1^{(1)}, N_2^{(1)\dagger}]_{a\bar{a}'} &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

en voor  $U(Q_5)$

$$\begin{aligned} A_{a\bar{b}'}A_{a\bar{b}}^* - B_{b\bar{a}}B_{b'\bar{a}}^* + [N_1^{(5)}, N_1^{(5)\dagger}]_{b\bar{b}'} - [N_2^{(5)}, N_2^{(5)\dagger}]_{b\bar{b}'} &= 0 \\ A_{a\bar{b}'}B_{b\bar{a}} + [N_1^{(5)}, N_2^{(5)\dagger}]_{b\bar{b}'} &= 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Waarbij voor de indices geldt

---

<sup>7</sup>Afkorting van *vacuum expectation value*

$$\begin{aligned}
a, a' &= 1, \dots, Q_1 \\
b, b' &= 1, \dots, Q_5
\end{aligned}
\tag{3.52}$$

Het totaal aantal bosonische vrijheidsgraden uit de hypermultiplets, zijnde  $Y_{a\bar{a}}^{(1)}, Y_{b\bar{b}}^{(5)}, A_{a\bar{b}}$  en  $B_{\bar{a}b}$ , is gelijk aan

$$\text{D.o.F.} = 4Q_1^2 + 4Q_5^2 + 4Q_1Q_5 \tag{3.53}$$

Maar de *D-flatnessconditions* 3.50 en 3.51 zorgen voor extra constraints. De eerste vergelijking in 3.50 is reëel en de tweede is complex. In totaal zorgt dat voor  $Q_1 + 2Q_1^2 = 3Q_1^2$  constraints. Analoog voor 3.51, dat in totaal  $3Q_5^2$  constraints zal leveren.

Ijksymmetrie [37] van  $U(Q_1)$  en  $U(Q_5)$  laat toe om nogmaals  $Q_1^2 + Q_5^2$  vrijheidsgraden te elimineren. Uiteindelijk is het aantal bosonische vrijheidsgraden zo ingeperkt tot

$$\text{D.o.F.} = 4Q_1Q_5 \tag{3.54}$$

### 3.2.4 De entropieformule

Na het berekenen van het aantal toestanden, geeft ons dat nog steeds geen entropie. Voor de link tussen beide hebben we nood aan de partitiefunctie van een kwantumsnaar met vaste eindpunten<sup>8</sup>. Wegens de centrale rol van deze formule, gaan we hier even dieper op in. In deze uiteenzetting volgen we de structuur van [4].

#### Inleiding

Om de gedachten te vestigen, beginnen we bij een enkele snaar. Wat betreft verschillende excitatieniveaus, is de snaar in feite een verzameling van harmonische oscillatoren. De totale energie van de snaar is

$$\hat{H} = \sum_l \hat{H}_l = \hbar\omega_0 \sum_l l\alpha_l^\dagger \alpha_l \tag{3.55}$$

Met  $\alpha_l^\dagger$  en  $\alpha_l$  respectievelijk de creatie-en annihilatieoperators van de  $l$  oscillator. De getaloperator  $\hat{N}$  is

---

<sup>8</sup>In [4] wordt dit scenario de *quantum violin string* genoemd.

$$\hat{N} = \sum_l l \alpha_l^\dagger \alpha_l \quad (3.56)$$

en telt de kwanta in elke oscillator. De eigenwaarde van deze operator is dan gerelateerd met de energie als

$$E = \hbar\omega_0 N \quad (3.57)$$

Een bepaalde snaartoestand wordt dus als het ware volledig gekarakteriseerd door de bezettingsgetallen van de verschillende oscillatoren  $\{n_1, \dots, n_l\}$ . Een bepaalde toestand  $|\psi\rangle$  waarvoor geldt  $\hat{N}|\psi\rangle = N|\psi\rangle$ , kan op zeer verschillende manieren opgebouwd zijn. De energie van die toestand ligt dus wel vast, maar de precieze bezettingstoestand van de onderliggende oscillatoren  $\{n_1, \dots, n_l\}$  helemaal niet.

We definiëren de *partitie*  $p(N)$  als het aantal mogelijkheden dat we hebben om een bepaalde toestand  $|\psi\rangle$  te bouwen, waarvoor geldt  $\hat{N}|\psi\rangle = N|\psi\rangle$ . Dit getal dat het aantal microtoestanden weerspiegelt, is nauw gerelateerd met de entropie van het systeem. Die definiëren we als volgt

$$S(E) = k \ln p(N) = k \ln p\left(\frac{E}{\hbar\omega_0}\right) \quad (3.58)$$

Verder weten we dat de entropie in verband staat met de *vrije energie*  $F$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (3.59)$$

De vrije energie wordt gedefinieerd als

$$F = -kT \ln Z \quad (3.60)$$

met  $Z$  de *partitiefunctie*



$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\alpha} \exp\left(-\frac{E_{\alpha}}{kT}\right) \\
&= \sum_{n_l=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{\hbar\omega_0}{kT}(n_1 + \dots + ln_l)\right] \\
&= \sum_{n_1} \exp\left[-\frac{\hbar\omega_0}{kT}n_1\right] \cdots \sum_{n_l} \exp\left[-\frac{\hbar\omega_0}{kT}ln_l\right] \\
&= \prod_l \sum_{n_l} \exp\left[-\frac{\hbar\omega_0}{kT}ln_l\right] \\
&= \prod_l \left(1 - \exp\frac{\hbar\omega_0}{kT}l\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Waarbij in de laatste regel de geometrische reeks  $x^1 + \dots + x^l = \frac{1}{1-x}$  gebruikt werd.

### Bosonische vrijheidsgraden

Deze partitiefunctie invullen in de definitie van vrije energie geeft ons dan

$$F = kt \sum_l \ln \left(1 - \exp \frac{\hbar\omega_0}{kT} l\right) \tag{3.62}$$

Indien de temperatuur hoog genoeg wordt, zodat  $\frac{\hbar\omega_0}{kT} \ll 1$ , dan kan de som vervangen worden door een integraal

$$\begin{aligned}
F &= \frac{(kT)^2}{\hbar\omega} \int dx \ln(1 - e^{-x}) \\
&\approx -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega} \int dx \left(e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} + \dots\right) \\
&= -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \\
&= -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega} \zeta(2) \\
&= -\frac{(kT)^2}{\hbar\omega} \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Waarbij we de zogenaamde  $\zeta$ -functie  $\zeta(n) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$  hebben toegepast. De entropie 3.58 kan vervolgens expliciet worden uitgewerkt

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k \frac{\pi^2}{3} \frac{kt}{\hbar\omega_0} \tag{3.64}$$

en de energie wordt (met  $\beta = \frac{1}{kT}$ )

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \beta F \\
&= -\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\hbar \omega_0} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\beta} \right) \\
&= \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\hbar \omega_0} \frac{1}{\beta^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \hbar \omega_0 \left( \frac{kT}{\hbar \omega_0} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Indien we dit resultaat 3.65 invoegen in het resultaat voor de entropie 3.64, lezen we

$$\begin{aligned}
S &= k\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{E}{\hbar \omega_0}} \\
&= 2\pi k \sqrt{\frac{N}{6}}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Het aantal microtoestanden wordt op die manier

$$\ln p(N) \approx 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}} \tag{3.67}$$

Wat in het geval van  $b$  bosonische vrijheidsgraden triviaal veralgemeend kan worden tot

$$\ln p(N) \approx 2\pi \sqrt{\frac{Nb}{6}} \tag{3.68}$$

### Fermionische vrijheidsgraden

Indien we te maken hebben met een fermionisch systeem, is het bezettingsgetal niet langer willekeurig in te vullen maar geldt er  $n_l = 0$  of  $n_l = 1$ . De partitiefunctie 3.61 wijzigt als volgt:

$$\begin{aligned}
Z &= \prod_l \sum_{n_l=0}^1 \exp \left[ -\frac{\hbar \omega_0}{kT} l n_l \right] \\
&= \prod_l \left( \exp \left( -\frac{\hbar \omega_0}{kT} l \right) + 1 \right)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

en de vrije energie 3.63 met  $x = \frac{\hbar \omega_0}{kT} l$ )

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{1}{\beta} \ln Z \\
&= -\frac{1}{\beta} \sum_l \ln \left( \exp \left( -\frac{\hbar\omega_0}{kT} l \right) + 1 \right) \\
&\approx -\frac{1}{\beta^2 \hbar\omega_0} \int dx \ln(e^{-x} + 1) \\
&\approx -\frac{1}{\beta^2 \hbar\omega_0} \int dx \left( e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} - \dots \right) \\
&\approx -\frac{1}{\beta^2 \hbar\omega_0} \left( 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots \right) \tag{3.70}
\end{aligned}$$

De laatste term kunnen we omvormen, om het resultaat af te leiden uit de reeds gekende waarde  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ .

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} &= \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \right) - \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} \right) \\
&= \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) - 2 \cdot \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) \\
&= \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) - 2 \cdot \frac{1}{2^2} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} \\
&= \frac{\pi^2}{12} \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Voor het aantal microtoestanden in een dergelijk fermionisch systeem vindt men zo

$$\ln p(N) \approx 2\pi \sqrt{\frac{N}{12}} \tag{3.72}$$

En voor een systeem met  $b$  bosonische vrijheidsgraden en  $f$  fermionische vrijheidsgraden vindt men uiteindelijk

$$\ln p(N) \approx 2\pi \sqrt{\frac{N}{6} \left( b + \frac{f}{2} \right)} \tag{3.73}$$

Dit is een benaderende formule, geldig voor grote  $N$ .

### Berekening entropie

Nu we over formule 3.73 beschikken, kunnen we op basis van de resultaten uit de vorige paragrafen de entropie van ons vijfdimensionaal zwart gat berekenen.

Via de studie van de ijktheorie vonden we

- $4Q_1Q_5$  bosonische vrijheidsgraden
- $4Q_1Q_5$  fermionische vrijheidsgraden

Indien we dit invullen in de entropieformule

$$S = 2\pi \sqrt{\frac{N}{6} \left( 4Q_1Q_5 + \frac{4Q_1Q_5}{2} \right)} \quad (3.74)$$

Waarbij  $N$  in dit geval het aanwezige momentum in dit  $D1/D5$  systeem voorstelt. Dit geeft uiteindelijk

$$S = 2\pi \sqrt{NQ_1Q_5} \quad (3.75)$$

In perfecte overeenkomst met 2.149. In dit geval moeten we wel opmerken dat er aan  $N \gg Q_1Q_5$  voldaan moet zijn, kwestie van formule 3.73 te kunnen toepassen.<sup>9</sup>

Ondanks het mooie resultaat, willen we meer vertrouwen krijgen in deze berekening, vooral dan wat betreft de geldigheid. Via de studie van de effectieve snaar vonden we

- 4 bosonische vrijheidsgraden
- 4 fermionische vrijheidsgraden

met als excitatieniveau  $n'_1 n'_5 n_p = NQ_1Q_5$ . Dit inpluggen in de entropieformule 3.73 geeft<sup>10</sup>

$$S = 2\pi \sqrt{\frac{NQ_1Q_5}{6} \left( 4 + \frac{4}{2} \right)} = 2\pi \sqrt{NQ_1Q_5} \quad (3.76)$$

Merk op dat, als we het systeem bekijken als een lange, effectieve snaar voor de  $N$  in 3.73 nu geldt  $N = n'_1 n'_5 n_p = NQ_1Q_5 \gg b, f$ <sup>11</sup> en hier is er dus erg duidelijk voldaan aan de eis van “grote  $N$ ”. Het gevonden resultaat komt overeen met 2.149.

---

<sup>9</sup>Deze restrictie lijkt misschien problematisch, maar is het niet echt. In de originele afleiding van de entropie [38] wordt er nog rigoureuzer te werk gegaan (via *Kahlermanifolds*). Op die manifolds leeft een CFT en men bepaalt de entropie in dat geval via de Cardy-formule (die trouwens qua vorm volledig overeenstemt met de entropieformule die we hier gebruikt hebben). Voor een beknopt overzicht, cf. [30]

<sup>10</sup>We stellen  $k = 1$  hier.

<sup>11</sup>De laatste  $N$  verwijst hier naar het aantal momentumkwanta en niet naar de  $N$  in 3.73.

## 3.3 Non-extremaal zwart gat en Hawkingstraling

### 3.3.1 Inleiding

De volgende stap, na het bekomen van een  $D$ -braanmodel dat degelijke resultaten levert inzake de entropie van een extremaal zwart gat, is logischerwijze proberen af te wijken van dit extremaal scenario. Via perturbatieve berekeningen kunnen we onderzoeken hoe verschillende grootheden zich gedragen in het niet-extremale geval. [9]

De perturbaties die we toevoegen aan de *BPS-limiet*<sup>12</sup> kunnen op vele manieren gebeuren. De grootteorde van onze perturbaties is de volgende

$$M \gg \delta M \gg \text{massa van typische excitaties} \quad (3.77)$$

We zijn geïnteresseerd in die perturbaties die de entropie van het zwart gat het meest beïnvloeden. Een perturbatie toevoegen wordt in de praktijk gerealiseerd door het toevoegen van een excitatie aan de  $D$ -braan configuratie. Zoals eerder al geargumenteed, worden deze excitaties verwezenlijkt door open snaren die leven op de branen.

Gezien onze originele configuratie bestaat uit een gas van linkslopende oscillaties (zogenaamde *left-movers*) (Cf. 3.9), ligt het voor de hand dat het toevoegen van een klein aantal rechtslopende oscillaties (*right movers*) de manier is om weg te perturberen van het extremale scenario 3.1.1. Om de  $N$  “lading” 3.9 behouden te noemen, moet elke perturbatie ook nog gecompenseerd worden.

$$\delta N_R = \delta N_L \quad (3.78)$$

Zo blijft de  $N = N_L - N_R$  ongewijzigd. Laat ons nu vergelijken hoe beide van deze perturbaties hun weerslag hebben op de entropie. In het extremale geval geldt

$$S \sim \sqrt{N} = \sqrt{N_L} \quad (3.79)$$

Het effect op de “linkslopende” entropie<sup>13</sup> is

---

<sup>12</sup>Cf. appendix C

<sup>13</sup>De entropie kan gesplitst worden als  $S = S_L + S_R$ , afkomstig van rechtslopende en linkslopende modes.

$$\begin{aligned}
\delta S_L &\sim \sqrt{N + \delta N_L} - \sqrt{N} \\
&\sim \sqrt{N + \delta N_R} - \sqrt{N} \\
\frac{\delta S_L}{S} &\sim \sqrt{1 + \frac{\delta N_R}{N_L}} - 1 \\
&\sim 1 + \frac{\delta N_R}{2N_L} - 1 \\
&\sim \frac{\delta N_R}{2N_L}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Het effect op de rechtslopende entropie is echter

$$\begin{aligned}
\delta S_R &\sim \sqrt{\delta N_R} \\
\frac{\delta S_R}{S} &\sim \sqrt{\frac{\delta N_R}{N_L}}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

en dus dominant. Voor een algemener geval dienen we niet alleen perturbaties van de  $N$  te beschouwen, maar ook perturbaties van de  $Q_1$  en de  $Q_5$ . In ons constituent brane model komt deze veralgemening neer op het toevoegen van antibranen aan de extreme configuratie. Het is niet onmiddellijk duidelijk hoe we dit concreet kunnen aanpakken, dus nemen we onze toevlucht tot U-dualiteit. We beschikken bijvoorbeeld over de U-dualiteitstransformatie 2.155 die de drie ladingen van het zwart gat onderling permuteert en dus op die manier is de redenering die we toepasten voor  $N_R$  te extrapoleren naar de toevoegingen van anti  $D1$ -branes en anti  $D5$ -branes. Dit argument op basis van dualiteiten stelt ons in staat om aan te nemen dat het gedrag van de entropie ook equivalent verloopt.

$$\frac{\delta S}{S} \sim \sqrt{\frac{\delta Q_1}{Q_1}} \quad \text{en} \quad \frac{\delta S}{S} \sim \sqrt{\frac{\delta Q_5}{Q_5}} \tag{3.82}$$

Om te kijken naar de relatie tussen de entropie en de massa, beginnen we bij 3.11. In het Reissner-Nordström geval geldt

$$\frac{M}{3} = \frac{1}{R}(N_R + N_L) \tag{3.83}$$

Alle drie bijdragen aan de massa (vanwege de  $D1$ ,  $D5$  en de momenta  $N$ ) zijn immers even groot. Verdere uitwerking leert

$$\begin{aligned}
\delta M &\sim 3(\delta N_R + \delta N_L) \\
&\approx 6\delta N_R \\
M &\sim 3(N_R + N_L) \\
&\approx 3N_L \approx 3N
\end{aligned} \tag{3.84}$$

en dus

$$\begin{aligned}
\frac{\delta M}{M} &\sim \frac{6\delta N_R}{3N} \\
&= \frac{2\delta N_R}{N}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Als we dit dan vergelijken met de entropieverandering

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{S} &\sim 3\sqrt{\frac{\delta N_R}{N}} \\
&\sim \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\delta M}{M}}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Deze functionele afhankelijkheid van de massa is dezelfde als het standaard Bekenstein-Hawkingresultaat (Cf. appendix ) voor het vijfdimensionale Reissner-Nordström zwart gat [9].

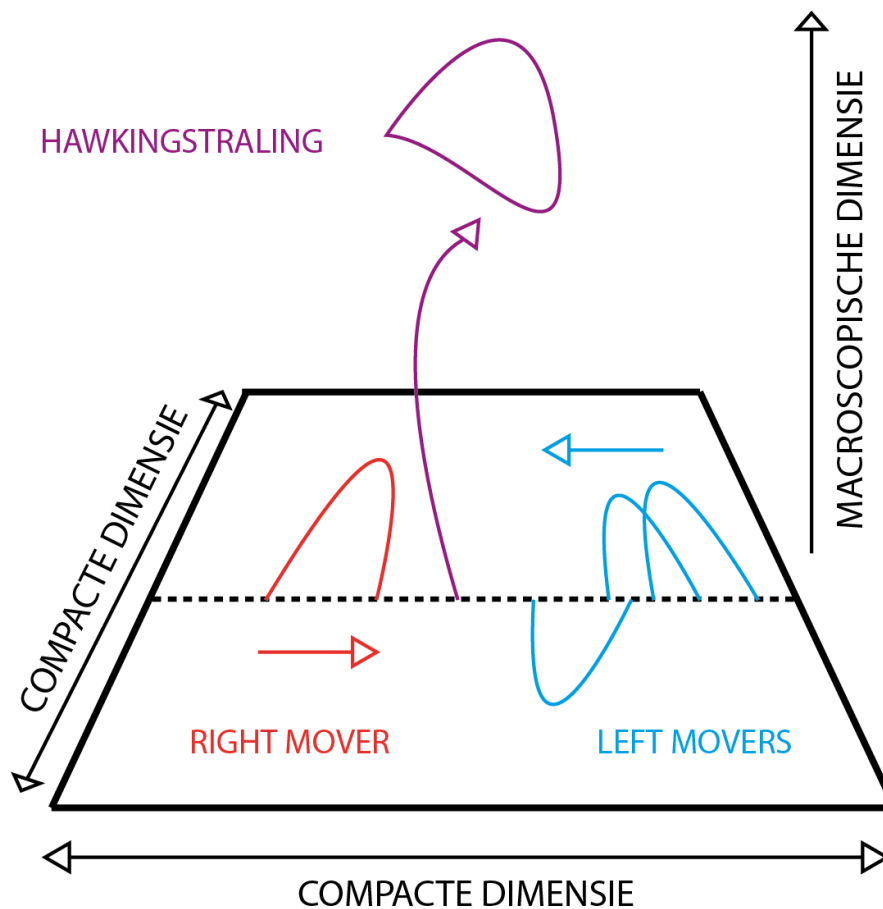
Een niet-extremaal zwart gat zal vervallen naar een extremaal zwart gat, de stabiele toestand. De eenvoudigste manier waarop we dit verval kunnen modelleren is door een collisie van de links-en rechtslopende excitaties. Dit vervalproces is ook verantwoordelijk voor het fenomeen van Hawkingstraling in ons model.

### 3.3.2 Hawkingstraling

Hawkingstraling is een bekend effect bij zwarte gaten, waarbij zwarte gaten zich gedragen als een zwarte straler, en dus *black body radiation* uitzenden. Het uitzenden van die thermische straling impliceert meteen dat zwarte gaten een eindige temperatuur hebben, die gekend is als de *Hawkingtemperatuur*. [39] [8] [40] [41]

Het  $D$ -braanmodel is ook in staat om dit effect te reproduceren [9] [22]. We gebruiken hier onze lange, effectieve snaar benadering. Beschouw een rechtslopende excitatie met  $p_9 = \frac{n}{R_9 Q_1 Q_5}$ , die botst met een linkslopende excitatie met  $p_9 = -\frac{n}{R_9 Q_1 Q_5}$ . De kwantisatie van deze momenta vindt z'n oorsprong in de lange, effectieve snaar benadering. De excitaties worden gedragen door open snaren op de branen. Als deze twee botsen, kunnen ze samensmelten, de braan verlaten en zo een gesloten snaar vormen in de bulk, met als energie  $k_0 = \frac{2n}{R_9 Q_1 Q_5}$ , cf. figuur 3.1. Indien de momenta niet perfect gelijk zijn, zal de gesloten snaar ook nog wat momentum hebben in de

$X_9$  richting, die compact is. Dit zal dan een geladen deeltje zijn. Dit geval is echter thermisch onderdrukt, gezien die ladingen gekwantiseerd zijn volgens  $1/R_9$ .



Figuur 3.1: Hawkingstraling in het  $D$ -braanmodel

### Thermodynamica

Om de eigenschappen van de Hawkingstraling af te leiden, nemen we eerst de thermodynamica onder de loep. We beschouwen het canonische ensemble<sup>14</sup>

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_N q^{N'} d(N') \\
 &= \sum_N q^{N'} e^{2\pi\sqrt{N'}}
 \end{aligned}
 \tag{3.87}$$

waarbij

<sup>14</sup>Voor een korte introductie tot statistische fysica, cf. [42] [43]. Voor meer diepgang en specifiek in relatie met zwarte gaten, cf. [40]



$$N' = NQ_1Q_5 \quad (3.88)$$

het aantal momentumkwanta voorstelt van de lange, effectieve snaar 3.40. Nu gaan we het “gas” van de rechtslopende oscillaties even apart bekijken. In de eerste instantie zijn we geïnteresseerd in de temperatuur van dit gas. Een eerste manier is via de standaardrelatie tussen temperatuur en entropie

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad (3.89)$$

Waarbij in ons geval geldt

$$\begin{aligned} E &= \frac{\delta N_R}{R_9} \\ &= \frac{\delta N'_R}{R_9 Q_1 Q_5} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Indien we dan de entropie herschrijven in termen van deze energie

$$S = 2\pi\sqrt{\delta N'_R} = 2\pi\sqrt{E}\sqrt{R_9 Q_1 Q_5} \quad (3.91)$$

Dan krijgen we

$$\begin{aligned} \partial_E S(E) &= \frac{\pi}{\sqrt{E}}\sqrt{R_9 Q_1 Q_5} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\delta N_R}} R_9 \sqrt{Q_1 Q_5} \\ &= \pi R \frac{Q_1 Q_5}{\delta N_R} \end{aligned} \quad (3.92)$$

en dat geeft dan

$$T_R = \frac{1}{\pi} \frac{1}{R_9} \sqrt{\frac{\delta N_R}{Q_1 Q_5}} \quad (3.93)$$

Voor de linkslopende temperatuur komt men analoog tot

$$T_L = \frac{1}{\pi} \frac{1}{R_9} \sqrt{\frac{N}{Q_1 Q_5}} \quad (3.94)$$

Waaruit dus reeds te zien is dat geldt  $T_R \ll T_L$

### Het vervaltempo

Nu we weten welk proces de bron is van de Hawkingstraling in ons model, gaan we het productietempo berekenen, en bekijken of dit overeenstemt met onze verwachtingen. Het vervaltempo van de open snaren is

$$d\Gamma \sim \frac{d^4k}{k_0} \frac{1}{p_0^R p_0^L V R} \delta(k_0 - (p_0^R + p_0^L)) \sum_{i,f} |\langle \psi_f | H_I | \psi_i \rangle|^2 \quad (3.95)$$

De laatste term bevat de dichtheidsmatrices

$$\begin{aligned} \sum_{i,f} |\dots|^2 &\sim \rho_L(n) \rho_R(n) \\ \rho_R(n) &= \frac{1}{N_i} \sum_i \langle \psi_i | a_n^{R\dagger} a_n^R | \psi_i \rangle \\ \rho_L(n) &= \frac{1}{N_i} \sum_i \langle \psi_i | a_n^{L\dagger} a_n^L | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (3.96)$$

We kunnen  $\rho$  ook schrijven als [13] [9]

$$\rho_R(k_0) = \frac{q^n}{1 - q^n} = \frac{e^{-k_0/2T_R}}{1 - e^{-k_0/2T_R}} \quad (3.97)$$

Uit de partitiefunctie kan rechtstreeks een uitdrukking bepaald worden voor de  $q$ . Een eerste stap is het logaritme nemen van de partitiefunctie 3.87

$$\log Z = N' \log q + 2\pi\sqrt{N'} \quad (3.98)$$

Dan kijken we wanneer deze verandering in entropie maximaal is

$$\begin{aligned} \partial_{N'_R} \log Z &= \log q + \frac{2\pi}{2\sqrt{N'_R}} \\ &= 0 \\ &\Downarrow \\ \log q &= \frac{-\pi}{\sqrt{N'_R}} \end{aligned} \quad (3.99)$$

indien we dit dan invullen in 3.97, dan vinden we

$$\begin{aligned}
\frac{\pi n}{\sqrt{N'_R}} &= \frac{k_0}{2T_R} \\
&= \frac{n}{R_9 Q_1 Q_5 T_R} \\
&\Downarrow \\
T_R &= \frac{1}{2\pi n} \frac{2n}{R_9 Q_1 Q_5} \sqrt{\delta N'_R} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{R_9 Q_1 Q_5} \sqrt{Q_1 Q_5 \delta N_R} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{R_9} \sqrt{\frac{\delta N_R}{Q_1 Q_5}}
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Dit resultaat is dus consistent met ons eerdere resultaat voor  $T_R$ . In het geval van de linkslopende dichtheidsmatrix, kan er een vereenvoudiging doorgevoerd worden

$$\begin{aligned}
\rho_L(k_0) &= \frac{e^{-k_0/2T_L}}{1 - e^{-k_0/2T_L}} \\
&\approx \frac{2T_L}{k_0} \\
&= \frac{2}{\pi k_0 R_9} \sqrt{\frac{N}{Q_1 Q_5}}
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Het vervaltempo wordt dan

$$\begin{aligned}
d\Gamma &\sim \frac{d^4 k}{k_0} \frac{1}{p_0^R p_0^L RV} |A|^2 Q_1 Q_5 R \rho_L \rho_R \\
&\sim \frac{g^2}{RV} \sqrt{Q_1 Q_5 N} \frac{e^{-k_0/2T_R}}{1 - e^{-k_0/2T_R}} d^4 k \\
&\sim (\text{Oppervlakte}) \cdot \frac{e^{-k_0/2T_R}}{1 - e^{-k_0/2T_R}} d^4 k
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Dit zegt ons dat de straling afkomstig door het proces van botsende open snaren die een gesloten snaar in de bulk vormen thermische emissie is met een temperatuur

$$T_H = 2T_R \tag{3.103}$$

In dit vervaltempo komt ook de horizonoppervlakte naar voren, net zoals dat gebeurt in semi-klassieke berekeningen.

# Hoofdstuk 4

## Besluit

Onze studie ging van start met het bepalen van braanoplossingen in type II supergravitatie. Het blijkt dat deze oplossingen gekenmerkt worden door de harmonische functies  $f_p$ . Om uiteindelijk te komen tot een model voor een vijfdimensionaal zwart gat is dimensionale reductie noodzakelijk. Compactificatie op  $\mathbf{T}^5 = \mathbf{T}^4 \times \mathbf{S}^1$  maakt van onze supergravitatie-oplossing een oplossing in vijf dimensies, zoals gewenst. Om een realistisch zwart gat te bekomen, dient men verschillende, goedgekozen braanoplossingen te superponeren. Een configuratie die werkt is de superpositie van 5-branen, 1-branen en momentum op  $\mathbf{S}$ . We verkrijgen een extremaal, vijfdimensionaal, Reissner-Nordström zwart gat.

We kunnen de oppervlakte van het aldus bekomen zwart gat berekenen uit de geassocieerde metriek en de entropie volgt vervolgens uit de *Bekenstein-Hawking area law*. In het extremale geval vinden we  $S = \sqrt{NQ_1Q_5}$ . Deze entropie hangt niet af van enige continue parameters in het systeem, maar enkel van de hoeveelheid aanwezige 5-branen ( $Q_5$ ), 1-branen ( $Q_1$ ) en momentkwanta ( $N$ ). Deze aantallen zijn onderling inwisselbaar door middel van U-dualiteit, om te concretiseren werd de transformatie  $U = T_6T_7T_8T_9ST_5T_6$  die  $(N, Q_1, Q_5)$  naar  $(Q_5, N, Q_1)$  stuurt expliciet nagegaan.

Deze U-dualiteit kunnen we handig toepassen om te argumenteren dat dit model ook bruikbaar is voor een niet-extremaal zwart gat. Via boosts kunnen we extra momentum toevoegen aan de oplossing, en op die manier de  $N$  wijzigen. De andere aantallen wijzigen gaat via hetzelfde principe, via U-dualiteit kunnen we immers  $Q$  omzetten naar  $N$ , een boost toepassen en vervolgens de omgekeerde transformatie uitvoeren. De invariantie van de entropie onder U-dualiteit laat ons dus toe om de boostprocedure te veralgemenen voor elk van de drie ladingen aanwezig in ons systeem.

Die niet-extremale oplossing wordt vervolgens geanalyseerd in het constituent brane model, en het blijkt dat ook deze oplossing beschouwd kan worden als opgebouwd uit  $D$ -branen en anti- $D$ -branen. De entropieformule wordt zo  $S = 2\pi \left( \sqrt{N_1} + \sqrt{\bar{N}_1} \right) \left( \sqrt{N_5} + \sqrt{\bar{N}_5} \right) \left( \sqrt{N_R} + \sqrt{N_L} \right)$ .

Eens dit model opgesteld is, kunnen we aan de microscopische kant van de zaak met snaartheo-

rie uitspraken doen over het aantal microtoestanden van het systeem. Een telling van het aantal vrijheidsgraden kan gebeuren via de effectieve snaar benadering, of door expliciet de ijktheorie die leeft op de branen te gaan analyseren. Bij berekening van de entropie zijn de resultaten consistent met de resultaten uit supergravitatie. Het microscopisch model is in staat om de correcte entropieformule te produceren.

In het niet-extremale geval kunnen we ook nog een proces beschrijven dat Hawkingstraling reproduceert. Twee open snaren die in tegengestelde richting lopen op  $S^1$  kunnen bij botsing een gesloten snaar vormen en de braan verlaten. Het productietempo van dit proces komt overeen met wat we verwachten van Hawkingstraling. Opvallend is dat ook de oppervlakte van het zwart gat opduikt in dit vervaltempo, de geometrie van het model wordt dus weerspiegeld in deze microscopische beschrijving.

# Appendix A

## Tetradformalisme

Het zogenaamde tetradformalisme geeft ons een intuïtieve manier om om te gaan met verschillende basissen. Hier volgt een zeer kort overzichtje dat ons net voldoende achtergrondkennis zal geven om het probleem van de harmonische functie aan te pakken. Voor een meer algemene introductie verwijzen we naar [15], appendix J.

### A.1 Inleiding

Nemen we als uitgangspunt een manifold  $\mathcal{M}$ , in elk punt van die manifold hebben we

- $\mathcal{T}_P$ , de *tangent space* met als basisvectoren  $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$
- $\mathcal{T}_P^*$ , de *cotangent space* met als basisvectoren  $\hat{\theta}^\mu = dx^\mu$

waarbij de basisvectoren geassocieerd met deze ruimtes een natuurlijke definitie hebben, gerelateerd aan het gekozen coördinatenstelsel  $x^\mu$ . Nu laten we die natuurlijke basiskeuze vallen, en kiezen zelf een willekeurige basis. Stel

$$\hat{e}_a \tag{A.1}$$

als onze persoonlijke basiskeuze. In wat volgt zullen we indices uit het begin van het alfabet ( $a, b, c, \dots$ ) steeds laten verwijzen naar onze eigen keuzes, terwijl de Griekse indices ( $\mu, \nu, \lambda, \dots$ ) betrekking zullen hebben op de natuurlijke basiskeuzes. We kiezen onze eigen basis wel als een orthonormale basis, dit wil zeggen

$$g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = \eta_{ab} \tag{A.2}$$

waarbij de  $g(\dots)$  notatie bedoeld is als een soort “metrische tensor operator”. Indien we de natuurlijke basis nu schrijven in termen van de nieuwe zelfgekozen basis (en andersom), doen we dit zo

$$\begin{aligned}\hat{e}_\mu &= e_\mu^a \hat{e}_a \\ \hat{e}_a &= e_a^\mu \hat{e}_\mu\end{aligned}\tag{A.3}$$

Het verband tussen beiden zit in de  $e_\mu^a$ , dit object noemen we een *vielbein*. Enkele eigenschappen van vielbeins zijn

$$\begin{aligned}e_\mu^a e_a^\nu &= \delta_\nu^\mu \\ e_\mu^a e_b^\mu &= \delta_b^a \\ \eta_{ab} &= g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \\ g_{\mu\nu} &= e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}\end{aligned}\tag{A.4}$$

Analoog kan men definiëren

$$\hat{\theta}^\mu = e_a^\mu \hat{\theta}^a\tag{A.5}$$

Kortom, zeer pragmatisch bekeken geldt: vielbeins zijn geschikt om een vector of tensor snel om te zetten van de ene basis in de andere, het enige waar we op moeten letten zijn de indices. Ter illustratie:

$$V_b^a = e_\mu^a V_b^\mu = e_\mu^a e_b^\nu V_\nu^\mu\tag{A.6}$$

## A.2 Spinconnectie

Nu we beschikken over de vielbeins, vestigen we onze aandacht op de covariante afgeleiden. Deze zijn immers verbonden aan coördinatenstelsels. De correctie tegenover de gewone partiële afgeleide modelleren we in de *spinconnecties*  $\omega_{\mu b}^a$ . We definiëren

$$\nabla_\mu X_b^a = \partial_\mu X_b^a + \omega_{\mu c}^a X_b^c - \omega_{\mu b}^c X_c^a\tag{A.7}$$

Qua werking zien we dat de term met het plusteken zorgt voor de correcte bovenindex, degene met het minteken doet hetzelfde voor de onderindex. De volgende stap is het bepalen van een expliciete uitdrukking voor de spinconnecties. Indien we de covariante afgeleide expliciet uitschrijven in componenten

$$\begin{aligned}
\nabla X &= (\nabla_\mu X^\nu) dx^\mu \otimes \partial_\nu \\
&= \left( \partial_\mu X^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu X^\lambda \right) dx^\mu \otimes \partial_\nu
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Nu gaan we dit uitschrijven in de zelfgekozen basis  $\hat{e}_a$

$$\begin{aligned}
\nabla X &= (\nabla_\mu X^a) dx^\mu \otimes \hat{e}_a \\
&= \left( \partial_\mu X^a + \omega_{\mu b}^a X^b \right) dx^\mu \otimes \hat{e}_a \\
&= \left( \partial_\mu (e_\nu^a X^\nu) + \omega_{\mu b}^a e_\lambda^b X^\lambda \right) dx^\mu \otimes e_a^\nu \partial_\nu \\
&= \left( e_a^\nu e_\nu^a \partial_\mu X^\nu + X^\nu e_a^\nu \partial_\mu e_\nu^a + e_a^\nu \omega_{\mu b}^a e_\lambda^b X^\lambda \right) dx^\mu \otimes \partial_\nu \\
&= \left( \partial_\mu X^\nu + e_a^\nu (\partial_\mu e_\lambda^a) X^\lambda + e_a^\nu e_\lambda^b \omega_{\mu b}^a X^\lambda \right) dx^\mu \otimes \partial_\nu
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Hieruit lezen we dan de expliciete gedaanten voor het Christoffelsymbool en de spinconnectie af

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\lambda}^\nu &= e_a^\nu \partial_\mu e_\lambda^a + e_a^\nu e_\lambda^b \omega_{\mu b}^a \\
&\Downarrow \\
\omega_{\mu b}^a &= e_\nu^a e_b^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_b^\lambda \partial_\mu e_\lambda^a
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Dit geeft aanleiding tot volgende eigenschap van de Vielbein

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu e_\nu^a &= \partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.11}$$

die dus steeds een covariante afgeleide zal hebben die verdwijnt. Deze eigenschap is bekend onder de naam *tetrad postulate* en is algemeen geldig.

De externe afgeleide (*exterior derivative*)

$$(dX)_{\mu\nu}^a = \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a \tag{A.12}$$

wordt op de volgende manier aangepast

$$(dX)_{\mu\nu}^a + (\omega \wedge X)_{\mu\nu}^a = \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a + \omega_{\mu b}^a X_\nu^b - \omega_{\nu b}^a X_\mu^b \tag{A.13}$$



### A.3 Kromming en torsie

We kunnen nu tensors op een andere manier interpreteren:

- $T_{\mu\nu}^a$  als een *vector-valued* tweevorm
- $R_{b\mu\nu}^a$  als een *1,1-tensor-valued* tweevorm<sup>1</sup>

Indien we dan onze zelfgekozen basis en de bijhorende spinconnectie nog schrijven in termen van de natuurlijke basis

$$\begin{aligned}e^a &= e_\mu^a dx^\mu \\ \omega_b^a &= \omega_{\mu b}^a dx^\mu\end{aligned}\tag{A.14}$$

Dan kunnen we de torsie en de kromming schrijven als

$$\begin{aligned}T^a &= de^a + \omega_b^a \wedge e^b \\ R_b^a &= d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c\end{aligned}\tag{A.15}$$

Deze schrijfwijzes van de torsie en kromming staan bekend onder de naam *Cartan structure equations*. In het geval dat er voldaan is aan  $T^a = 0$ , levert deze zogenaamde *torsion free condition* ons de volgende identiteit

$$\omega_b^a \wedge e^b = -de^a\tag{A.16}$$

---

<sup>1</sup>Voor deze interpretatie is antisymmetrie in de onderindices  $\mu, \nu$  wel essentieel.

## Appendix B

# Berekening harmonische functie

We beginnen<sup>1</sup> van volgende algemene Ansatz van de metriek

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{H^2} \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + H^2 \delta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta \\ H &= H(X^\alpha) \end{aligned} \tag{B.1}$$

Deze metriek stelt een ruimte voor met twee “soorten” dimensies. De  $X^\mu$  en  $X^\nu$  dimensies vormen een Minkowskiruimte, terwijl de  $X^\alpha$  en  $X^\beta$  dimensies een Euclidische ruimte (deze zullen we ook de *transversale ruimte* noemen) vormen.

We definiëren eerst een nieuwe basis

$$\begin{aligned} e^i &\equiv C dX^\mu = \frac{1}{H} dX^\mu \\ e^a &\equiv H dX^\alpha \end{aligned} \tag{B.2}$$

Op die manier ziet het  $ds^2$  er dan zo uit:

$$ds^2 = \eta_{ij} de^i de^j + \delta_{ab} de^a de^b \tag{B.3}$$

De externe afgeleiden van deze  $e^i$  en  $e^a$  zijn dan

---

<sup>1</sup>Cf. [44], [45] (App. C) en [46] (Oef. 1) voor andere voorbeelden van dergelijke berekeningen

$$\begin{aligned}
de^i &= d(C dX^\mu) = \partial_\alpha C dX^\alpha \wedge dX^\mu \\
&= \frac{1}{H} \frac{\partial_a C}{C} e^a \wedge e^i \\
&= \frac{1}{H} \partial_a \ln C e^a \wedge e^i \\
de^a &= d(H dX^\alpha) = \partial_\beta H dX^\beta \wedge dX^\alpha \\
&= \partial_b \ln H e^b \wedge e^a
\end{aligned} \tag{B.4}$$

## B.1 Spinconnectie bepalen

Met behulp van de *torsion free* eigenschap

$$\omega_y^x \wedge e^y = -de^x \tag{B.5}$$

kunnen we de externe afgeleiden herschrijven. We beginnen bij het transversale deel van de ruimtetijd

$$\begin{aligned}
-de^a &= \omega_b^a \wedge e^b + \omega_i^a \wedge e^i \\
&= -\partial_b \ln H e^b \wedge e^a
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Voor het andere deel van de ruimtetijd verkrijgen we analoog

$$\begin{aligned}
-de^i &= \omega_a^i \wedge e^a + \omega_j^i \wedge e^j \\
&= -\frac{1}{H} \partial_a \ln C e^a \wedge e^i
\end{aligned} \tag{B.7}$$

De reden om via de torsion free eigenschap te werk te gaan, is dat het hierbij dikwijls mogelijk is om via goede Ansätzen tot de spinconnecties te komen, wat tijd spaart tegenover het expliciet uitwerken. Ook hier kunnen we zo te werk gaan. In het transversale deel B.6 kunnen we specifiek kijken naar het geval  $a = b$

$$\begin{aligned}
\omega_a^a \wedge e^a + \omega_i^a \wedge e^i &= -\partial_a \ln H e^a \wedge e^a \\
0 + \omega_i^a \wedge e^i &= 0
\end{aligned} \tag{B.8}$$

De  $\omega_a^a$  valt weg wegens de antisymmetrie van die spinconnectie, terwijl  $-\partial_a \ln H e^a \wedge e^a$  wegvalt wegens de antisymmetrie van het wedge-product. Wederom door de antisymmetrie van het wedge-product zien we dat

$$\omega_i^a \sim e^i \quad (\text{B.9})$$

Simpelweg  $\omega_i^a = 0$  is ook een optie, maar zou ons bij de andere torsion free conditie het leven moeilijk maken. Op deze manier zien we dat  $\omega_i^a \wedge e^i$  steeds zal wegvallen in B.6, wat ons toelaat de andere term te bepalen

$$\begin{aligned} \omega_b^a \wedge e^b &= -\partial_b \ln H e^b \wedge e^a \\ &\Downarrow \\ \omega_b^a &= \frac{1}{H} (\partial_b \ln H e^a - \partial_a \ln H e^b) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Waarbij we nog de antisymmetrie van de spinconnectie manifest hebben gemaakt. Nu richten we onze aandacht op het andere deel van de ruimte B.7. Indien we als tweede Ansatz aannemen dat  $\omega_j^i = 0$ , dan kunnen we eenvoudig aan deze vergelijking voldoen.

$$\begin{aligned} \omega_a^i \wedge e^a + \omega_j^i \wedge e^j &= -\frac{1}{H} \partial_a \ln C e^a \wedge e^i \\ \omega_a^i \wedge e^a &= -\frac{1}{H} \partial_a \ln C e^a \wedge e^i \\ &\Downarrow \\ \omega_a^i &= \frac{1}{H} \partial_a \ln C e^i \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Deze uitdrukking voor  $\omega_a^i \sim e^i$  is bovendien compatibel met onze eerdere vaststelling B.9.

## B.2 Krommingstensor

De definitie van de krommingstensor in onze orthonormale coördinaten is

$$R_y^x = d\omega_y^x + \omega_z^x \wedge \omega_y^z \quad (\text{B.12})$$

waarbij we twee indices onderdrukken om de notatie enigszins te verlichten, maar die wel aanwezig zijn. Het gaat hier dus wel degelijk over de volledige krommingstensor en pas later zullen we contraheren over indices en zo overgaan op de Riccitenor. We berekenen nu de niet-nul componenten van deze krommingstensor expliciet.

### B.2.1 $R_{kl}^{ij}$

De eenvoudigste is de  $R_{kl}^{ij}$  component.

$$\begin{aligned}
R_j^i &= d\omega_j^i + \omega_a^i \wedge \omega_j^a + \omega_l^i \wedge \omega_j^l \\
&= \omega_a^i \wedge \omega_j^a \\
&= \frac{1}{H} \partial_a \ln C e^i \wedge \frac{1}{H} \partial_a \ln C e_j \\
R^{ij} &= -\frac{1}{H^2} (\partial_a \ln C)^2 (e^i \wedge e^j)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

In de laatste regel worden de  $i, j$  indices naar boven gehaald. Nu kijken we naar de onderindices.

$$\begin{aligned}
R_{kl}^{ij} &= -\frac{1}{H^2} (e^i \wedge e^j)_{kl} \\
&= -\frac{1}{H^2} (\partial_a \ln C)^2 (\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

### B.2.2 $R_{jb}^{ia}$

We beginnen met het uitschrijven van  $R_a^i$

$$\begin{aligned}
R_a^i &= d\omega_a^i + \omega_c^i \wedge \omega_a^c \\
&= \underbrace{d\left(\frac{1}{H} \partial_a \ln C e^i\right)}_{=X} + \underbrace{\frac{1}{H^2} \partial_c \ln C e^i \wedge (\partial_a \ln H e^c - \partial_c \ln H e^a)}_{=Y} \\
X &= \frac{-1}{H^2} \partial_c H \partial_a \ln C dX^c \wedge e^i + \frac{1}{H^2} \partial_a \ln C \partial_c \ln C e^c \wedge e^i + \frac{1}{H^2} \partial_c \partial_a \ln C e^c \wedge e^i \\
&= \frac{-1}{H^2} \partial_c \ln H \partial_a \ln C e^c \wedge e^i + \frac{1}{H^2} \partial_a \ln C \partial_c \ln C e^c \wedge e^i + \frac{1}{H^2} \partial_c \partial_a \ln C e^c \wedge e^i \\
Y &= \frac{1}{H^2} (\partial_c \ln C \partial_a \ln H e^i \wedge e^c) - \frac{1}{H^2} (\partial_c \ln C \partial_c \ln H e^i \wedge e^a)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Om dan de onderindices toe te voegen maken we gebruik van volgende wedge-products

$$\begin{aligned}
(e^c \wedge e^i)_{jb} &= \delta_j^c \delta_b^i - \delta_b^c \delta_j^i = -\delta_b^c \delta_j^i \\
(e^i \wedge e^a)_{jb} &= \delta_j^i \delta_b^a - \delta_b^i \delta_j^a = \delta_j^i \delta_b^a
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Als we nu alles samenvoegen (en de indices juist rangschikken), krijgen we het resultaat

$$\begin{aligned}
R_{jb}^{ia} &= \frac{1}{H^2} (\partial_b \ln H \partial_a \ln C - \partial_a \ln \partial_b \ln C + \partial_b \ln C \partial_a \ln H) \delta_j^i \\
&\quad - \frac{1}{H^2} \delta_b^a (\partial_c \ln C \partial_c \ln H) \delta_j^i - \frac{1}{H^2} \partial_b \partial_a \ln C \delta_j^i \\
&= \frac{1}{H^2} \delta_j^i (-\partial_a \partial_b \ln C - \partial_a \ln C \partial_b \ln C + \partial_a \ln C \partial_b \ln H \\
&\quad + \partial_a \ln H \partial_b \ln C - \delta_b^a \partial_c \ln C \partial_c \ln H)
\end{aligned} \tag{B.17}$$

### B.2.3 $R_{cd}^{ab}$

Zoals steeds beginnen we met de bovenindices (die we weliswaar voor gebruiksgemak rangschikken als een boven-en onderindex),  $R_b^a$

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_e^a \wedge \omega_b^e + \underbrace{\omega_i^a \wedge \omega_b^i}_{=0} \tag{B.18}$$

Dit behandelen we term per term, we beginnen met de  $d\omega$ -term, na invullen van de definitie B.10 vinden we

$$\begin{aligned}
d\omega_b^a &= d \left( \frac{1}{H} [\partial_b \ln H e^a - (a \leftrightarrow b)] \right) \\
&= -\frac{1}{H^2} \partial_e \ln H \partial_b \ln H e^e \wedge e^a + \frac{1}{H^2} \partial_e \partial_b \ln H e^e \wedge e^a \\
&\quad + \frac{1}{H^2} \partial_b \ln H \partial_e \ln H e^e \wedge e^a - (a \leftrightarrow b) \\
&= \frac{1}{H^2} \partial_e \partial_b \ln H e^e \wedge e^a - (a \leftrightarrow b)
\end{aligned} \tag{B.19}$$

waaruit het volledige resultaat onmiddellijk te veralgemenen is

$$d\omega_b^a = \frac{1}{H^2} \left( \partial_e \partial_b \ln H e^e \wedge e^a - \partial_e \partial_a \ln H e^e \wedge e^b \right) \tag{B.20}$$

Vervolgens spitsen we ons toe op het wedge-product

$$\begin{aligned}
\omega_e^a \wedge \omega_b^e &= \frac{1}{H^2} (\partial_e \ln H e^a - \partial_a \ln H e^e) \wedge (\partial_b \ln H e^e - \partial_e \ln H e^b) \\
&= \frac{1}{H^2} (\partial_e \ln H \partial_b \ln H e^a \wedge e^e - \partial_a \ln H \partial_e \ln H e^e \wedge e^b \\
&\quad + \partial_e \ln H \partial_e \ln H e^a \wedge e^b + \underbrace{\partial_a \ln H \partial_b \ln H e^e \wedge e^e}_{=0})
\end{aligned} \tag{B.21}$$

De uitwerking van  $R_{cd}^{ab}$  vereist dan nog een beetje puzzelwerk met de  $\delta$ -functies

$$\begin{aligned}
R_{cd}^{ab} = & \frac{1}{H^2} ((\partial_e \partial_b \ln H - \partial_e \ln H \partial_b \ln H)(e^e \wedge e^a)_{cd} \\
& - (\partial_e \partial_a \ln H + \partial_a \ln H \partial_e \ln H)(e^e \wedge e^b)_{cd} \\
& + \partial_e \ln H \partial_e \ln H (e^a \wedge e^b)_{cd})
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Laat ons hier overgaan op een schematische notatie, om zo het overzicht te bewaren

$$\begin{aligned}
\partial_a \partial_b & \equiv \partial_a \partial_b \ln H \\
\partial_a \cdot \partial_b & \equiv \partial_a \ln H \partial_b \ln H
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Dan rekenen we B.22 term per term uit, de eerste term wordt dan

$$\begin{aligned}
(\partial_e \partial_b - \partial_e \cdot \partial_b)(e^e \wedge e^a)_{cd} & = (\partial_e \partial_b - \partial_e \cdot \partial_b)(\delta_c^e \delta_d^a - \delta_d^e \delta_c^a) \\
& = (\partial_c \partial_b - \partial_c \cdot \partial_b) \delta_d^a - (\partial_d \partial_b - \partial_d \cdot \partial_b) \delta_c^a
\end{aligned} \tag{B.24}$$

en analoog voor de tweede term

$$(\partial_e \partial_a - \partial_e \cdot \partial_a)(e^e \wedge e^b)_{cd} = (\partial_c \partial_a - \partial_c \cdot \partial_a) \delta_d^b - (\partial_d \partial_a - \partial_d \cdot \partial_a) \delta_c^b \tag{B.25}$$

Als we dit dan samenvoegen en expliciet uitschrijven, vinden we uiteindelijk

$$\begin{aligned}
R_{cd}^{ab} = & \frac{1}{H^2} \left[ (\partial_b \partial_c \ln H - \partial_b \ln H \partial_c \ln H) \delta_b^a - (\partial_b \partial_d \ln H - \partial_b \ln H \partial_d \ln H) \delta_c^a \right. \\
& - (\partial_a \partial_c \ln H + \partial_a \ln H \partial_c \ln H) \delta_d^b + (\partial_a \partial_d \ln H + \partial_a \ln H \partial_d \ln H) \delta_c^b \\
& \left. + (\delta_c^a \delta_d^b - \delta_d^a \delta_c^b) (\partial_e \ln H)^2 \right]
\end{aligned} \tag{B.26}$$

### B.3 Riccitenor

Nu we de componenten van de krommingstensor berekend hebben, gaan we contraheren over de eerste en de derde index, om zo tot de Riccitenor te komen

$$R_y^x = R_{zy}^{zx} \tag{B.27}$$

Slechts twee componenten van de Riccitenor zullen in ons geval niet-nul zijn

$$R_y^x = R_b^a + R_j^i \quad (\text{B.28})$$

Als we die termen helemaal uitschrijven

$$\begin{aligned} R_{axb}^x &= R_{acb}^c + R_{aib}^i \\ R_{ixj}^x &= R_{iaj}^a + R_{ikj}^k \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

zien we de per term de componenten van de krommingstensor die we ervoor nodig hebben.

### B.3.1 $R_j^i$

We beginnen met  $R_j^i$  uit te rekenen.<sup>2</sup> We doen er goed aan om te starten met de sommaties expliciet uit te schrijven

$$\begin{aligned} R_j^i &= R_{xj}^{xi} = R_{nj}^{ni} + R_{cj}^{ci} \\ &= \eta_m^n R_{nj}^{mi} + \delta_d^c R_{cj}^{di} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Dit rekenen we term per term uit, te beginnen bij  $R_{nj}^{im}$ . We vullen ons resultaat B.14 in en dan voeren we de contractie uit

$$\begin{aligned} R_{nj}^{mi} &= -\frac{1}{H^2} (\partial_a \ln C)^2 (\eta_n^m \eta_j^i - \eta_j^m \eta_n^i) \\ R_{nj}^{ni} &= -\frac{1}{H^2} (\partial_a \ln C)^2 (\eta_n^m \eta_j^i - \eta_j^m \eta_n^i) \cdot \eta_m^n \\ &= -\frac{1}{H^2} (\partial_a \ln C)^2 (d \eta_j^i - \eta_j^i) \\ &= -\frac{1}{H^2} (\partial_a \ln C)^2 (d-1) \eta_j^i \\ &= -\frac{1}{H^2} (\partial \ln C)^2 (d-1) \eta_j^i \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Waarbij we gebruik maakten van  $\eta_i^i = d$ , het aantal  $X^\mu$  dimensies in de ruimtetijd (het niet-transversale deel). De tweede term,  $R_{cj}^{di}$  wordt, na invullen van B.17

---

<sup>2</sup>Nu zijn er geen indices onderdrukt, het gaat hier nu wel degelijk over de Riccitenor en niet over de (Riemann)krommingstensor



$$\begin{aligned}
\delta_d^c R_{cj}^{di} &= \frac{1}{H^2} \left( -\partial_c \partial_d \ln C - \partial_c \ln C \partial_d \ln C + \partial_c \ln C \partial_d \ln H \right. \\
&\quad \left. + \partial_d \ln C \partial_c \ln H - \delta_c^d \partial_a \ln C \partial_a \ln H \right) \eta_j^i \delta_d^c \\
&= \frac{1}{H^2} \left( \partial^2 \ln H - (\partial \ln H)^2 - 2(\partial \ln H)^2 + n(\partial \ln H)^2 \right) \eta_j^i \\
&= \frac{\eta_j^i}{H^2} \left( \partial^2 \ln H + (n-3)(\partial \ln H)^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Waarbij we de relatie  $\delta_d^d = n$  toepasten,  $n$  duidt hier op het aantal transversale dimensies  $X^\alpha$ . Om de eerste component van de Riccitenor te bekomen, voegen we nu nog beide termen samen

$$\begin{aligned}
R_j^i &= \frac{1}{H^2} \eta_j^i \left( \partial^2 \ln H + (n-3-d+1)(\partial \ln H)^2 \right) \\
&= \frac{\eta_j^i}{H^2} \left( -\frac{(\partial H)^2}{H^2} + \frac{\partial^2 H}{H} + (n-d-2)\frac{(\partial H)^2}{H^2} \right) \\
&= \frac{\eta_j^i}{H^2} \left( \frac{\square}{H} + (n-d-3)\frac{(\partial H)^2}{H^2} \right)
\end{aligned} \tag{B.33}$$

### B.3.2 $R_b^a$

Rest ons nog de berekening van de tweede component van de Riccitenor

$$\begin{aligned}
R_b^a &= R_{xb}^{xa} = R_{eb}^{ea} + R_{ib}^{ia} \\
&= \delta_f^e R_{eb}^{fa} + \eta_i^j R_{jb}^{ia}
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Ook hier gaan we term per term te werk. De eerste term  $R_{jb}^{ia}$  wordt, na toepassen van het resultaat B.17

$$\begin{aligned}
\eta_i^j R_{jb}^{ia} &= \frac{d}{H^2} \left( -\partial_a \partial_b \ln C - \partial_a \ln C \partial_b \ln C + \partial_a \ln C \partial_b \ln H + \partial_a \ln H \partial_b \ln C - \partial_b^a \partial_c \ln C \partial_c \ln H \right) \\
&= \frac{d}{H^2} \left( \partial_a \partial_b \ln H - \partial_a \ln H \partial_b \ln H - \partial_a \ln H \partial_b \ln H - \partial_a \ln H \partial_b \ln H + \delta_b^a (\partial_c \ln H)^2 \right) \\
&= \frac{d}{H^2} \left( \partial_a \partial_b \ln H - 3(\partial_a \ln H \partial_b \ln H) + \delta_b^a (\partial_c \ln H)^2 \right) \\
&= \frac{d}{H^2} \left[ \frac{\partial_a \partial_b H}{H} - \frac{\partial_a H \partial_b H}{H^2} - \frac{3}{H^2} \partial_a H \partial_b H + \delta_b^a \frac{(\partial H)^2}{H^2} \right] \\
&= \frac{d}{H^2} \left[ \frac{\partial_a \partial_b H}{H} - 4 \frac{\partial_a H \partial_b H}{H^2} v + \delta_b^a \frac{(\partial H)^2}{H^2} \right]
\end{aligned} \tag{B.35}$$

Voor de berekening van  $R_{eb}^{fa}$  door invullen van B.26, gaan we terug over op de schematische notatie B.23

$$\begin{aligned}
\delta_f^e R_{eb}^{fa} &= \frac{\delta_f^e}{H^2} \left[ (\partial_a \partial_e - \partial_a \cdot \partial_e) \delta_b^f - (\partial_a \partial_b - \partial_a \cdot \partial_b) \delta_e^f - (\partial_f \partial_e - \partial_f \cdot \partial_e) \delta_b^a \right. \\
&\quad \left. + (\partial_f \partial_b - \partial_f \cdot \partial_b) \delta_e^a - \left( \delta_e^f \delta_b^a - \delta_b^f \delta_e^a \right) (\partial_g)^2 \right] \\
&= \frac{1}{H^2} \left[ (\partial_a \partial_e - \partial_a \cdot \partial_e) \delta_b^e - (\partial_a \partial_b - \partial_a \cdot \partial_b) \delta_e^e - (\partial_f \partial_e - \partial_f \cdot \partial_e) \delta_f^e \delta_b^a \right. \\
&\quad \left. + (\partial_f \partial_b - \partial_f \cdot \partial_b) \delta_f^a - \left( \delta_e^f \delta_b^a - \delta_b^f \delta_e^a \right) \delta_f^e (\partial_g)^2 \right] \\
&= \frac{1}{H^2} \left[ (\partial_a \partial_b - \partial_a \cdot \partial_b) - n(\partial_a \partial_b - \partial_a \cdot \partial_b) + (\partial_a \partial_b - \partial_a \cdot \partial_b) \right. \\
&\quad \left. - \delta_b^a (\partial_f \partial_f - \partial_f \cdot \partial_f) - (\partial_g)^2 (n\delta_b^a - \delta_b^a) \right] \\
&= \frac{1}{H^2} \left[ (2-n)(\partial_a \partial_b - \partial_a \cdot \partial_b) - \delta_b^a (\partial_f \partial_f - \partial_f \cdot \partial_f + (\partial_f \cdot \partial_f)n - \partial_f \cdot \partial_f) \right] \\
&= \frac{1}{H^2} \left[ (2-n)(\partial_a \partial_b - \partial_a \cdot \partial_b) - \delta_b^a \left( \partial_f \partial_f + (n-2)(\partial_f \cdot \partial_f) \right) \right] \tag{B.36}
\end{aligned}$$

Nu we dit tussenresultaat weten, kunnen we afstappen van de schematische notatie en de logaritmes uitwerken

$$\begin{aligned}
\delta_f^e R_{eb}^{fa} &= \frac{1}{H^2} \left[ (2-n)(\partial_a \partial_b \ln H - \partial_a \ln H \partial_b \ln H) - \delta_b^a \partial^2 \ln H - \partial_b^a (n-2)(\partial \ln H)^2 \right] \\
&= \frac{1}{H^2} \left[ (2-n) \left( \frac{\partial_a \partial_b H}{H} - 2 \frac{\partial_a H \partial_b H}{H^2} \right) - \delta_b^a \left( \frac{\partial^2 H}{H} + (n-3) \frac{(\partial H)^2}{H^2} \right) \right] \tag{B.37}
\end{aligned}$$

De Riccitenor  $R_b^a$  wordt dan bekomen door het optellen van B.35 en B.37

$$\begin{aligned}
R_b^a &= \frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial_a \partial_b H}{H} (d-n+2) + \frac{\partial_a H \partial_b H}{H^2} (2n-4-4d) \right. \\
&\quad \left. + \delta_b^a \left( \frac{(\partial H)^2}{H^2} (d-n+3) - \frac{\partial^2 H}{H} \right) \right] \tag{B.38}
\end{aligned}$$

## B.4 Ricciscalar en bewegingsvergelijking

Tot slot bekijken we een illustratief toymodel met  $d = 1$  en  $n = 3$ , waarbij we de Ricciscalar  $R$  uitrekenen. De componenten van de Riccitenor worden dan

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{1}{H^4} \left[ -\frac{(\partial H)^2}{H^2} + \frac{\square H}{H} \right] \\
R_{ab} &= -2 \frac{\partial_a H \partial_b H}{H^2} + \delta_{ab} \left( \frac{(\partial H)^2}{H^2} - \frac{\square H}{H} \right) \tag{B.39}
\end{aligned}$$

Nu is de tijd gekomen om terug de omzetting te maken naar het oorspronkelijke coördinatenstelsel, in termen van  $X^\mu$  en  $X^\alpha$ . De componenten van de scalar laten zich eenvoudig berekenen, het transversale deel wordt

$$\begin{aligned}
R_\alpha^\alpha &= e_\alpha^a e_\beta^b \delta^{\alpha\beta} R_{ab} \\
&= \frac{1}{H^2} R_{ab} \delta^{ab} \\
&= -2 \frac{(\partial H)^2}{H^4} + 3 \frac{(\partial H)^2}{H^4} - 3 \frac{\square H}{H^3} \\
&= \frac{(\partial H)^2}{H^4} - 3 \frac{\square H}{H^3}
\end{aligned} \tag{B.40}$$

en voor het niet-transversale deel wordt de Ricciscalar

$$\begin{aligned}
R_\tau^\tau &= e_\tau^t e_\tau^t \delta^{\tau\tau} R_{tt} \\
R_\tau^\tau &= -H^2 R_{tt} \\
&= -\frac{(\partial H)^2}{H^4} + \frac{\square H}{H^3}
\end{aligned} \tag{B.41}$$

samen geven zij voor de Ricciscalar

$$\begin{aligned}
R &= \frac{(\partial H)^2}{H^4} - 3 \frac{\square H}{H^3} - \frac{(\partial H)^2}{H^4} + \frac{\square H}{H^3} \\
&= -2 \frac{\square H}{H^3}
\end{aligned} \tag{B.42}$$

De Einsteinvergelijkingen in vacuüm leert ons echter dat  $R = 0$ , en dus

$$-2 \frac{\square H}{H^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \square H = 0 \tag{B.43}$$

Hier zien we dus dat de functie  $H$  een harmonische functie moet zijn. Verder is er nog een randvoorwaarde, op oneindig willen we een vlakke ruimtetijd

$$H(x \rightarrow \infty) = 1 \tag{B.44}$$

Een harmonische functie die hieraan voldoet (in  $n = 3$  transversale dimensies) is

$$H = 1 + \frac{Q}{|\vec{x}|} \tag{B.45}$$

waarbij  $Q$  een nog nader te bepalen parameter is. In een algemene,  $D$  dimensionale ruimtetijd wordt dit dan

$$H = 1 + \frac{Q}{|\vec{x}|^{n-2}} \quad (\text{B.46})$$

Waarbij  $n$  staat voor het aantal transversale dimensies. Hier hebben we snel onze eerste Ansatz gecontroleerd in een vierdimensionaal toymodel. Laat ons nu veralgemenen naar een tiendimensionale ruimtetijd, want het is de tiendimensionale actie van sugra 2.14 die we eigenlijk proberen op te lossen.

## B.5 Ricciscalar in 10 dimensies

Laat ons beginnen met de componenten van de Riccitenor en de Ricciscalar even op een algemene manier te herwerken

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{H^4} \left[ \left( \frac{\partial H}{H} \right)^2 (n-d-3) + \frac{\square H}{H} \right] \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{H^4} \rho \\ R_{\alpha\beta} &= \left[ \frac{\partial_\alpha H}{H^2} \frac{\partial_\beta H}{H} (2n-4-4d) + \frac{\partial_\alpha \partial_\beta H}{H} (2-n+d) - \delta_{\alpha\beta} \rho \right] \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Hier introduceerden we de variabele  $\rho$ , die zowel in de transversale als het niet-transversale deel van de Riccitenor voorkomt. De vorm zoals ze hier uitgeschreven staat is nog steeds algemeen geldig. Indien we twee variabelen  $X$  en  $Y$  definiëren als volgt

$$\begin{aligned} X &\equiv \left( \frac{\partial H}{H} \right)^2 \\ Y &\equiv \frac{\square H}{H} \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

dan krijgen we voor de diagonaalcomponenten van de Riccitenor

$$\begin{aligned} R_{\mu\mu} &= \frac{\eta_{\mu\mu}}{H^4} \rho \\ R_{\alpha\beta} &= X(2n-4d-4) + Y(-n+d+2) - \delta_{\alpha\beta} \rho \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

met

$$\rho = X(n-d-3) + Y \quad (\text{B.50})$$

De (algemene) Ricciscalar wordt met deze nieuwe, eenvoudigere notatie

$$\begin{aligned}
R &= H^2 R_{ij} \eta^{ij} + \frac{R_{ab}}{H^2} \delta^{ab} \\
&= \frac{1}{H^2} [\eta_i^i \rho + X(2n - 4 - 4d) + Y(-n + d + 2) - \delta_a^a \rho] \\
&= \frac{1}{H^2} [\rho(\eta_i^i - \delta_a^a) + X(2n - 4 - 4d) + Y(-n + d + 2)] \\
&= \frac{1}{H^2} [\rho(d - n) + X(2n - 4 - 4d) + Y(-n + d + 2)] \tag{B.51}
\end{aligned}$$

### Voorbeeld: check van het toymodel

Laat ons, om deze vorm te testen, nog snel even terugkeren naar ons toymodel met  $n = 3$  en  $d = 1$ . Indien we dat invullen in B.51, krijgen we

$$\begin{aligned}
H^2 R &= -2\rho - 2X + 0Y = -2(-X + Y) - 2X = -2Y \\
&\Downarrow \\
R &= -2 \frac{Y}{H^2} = -2 \frac{\square H}{H^3} \tag{B.52}
\end{aligned}$$

Deze uitkomst via de algemene formule komt (zoals verwacht) exact overeen met het eerder gevonden resultaat voor het toymodel B.43.

### B.5.1 Bewegingsvergelijking sugra

Nu richten we onze aandacht op een sugra actie, als voorbeeld nemen we de IIB-variant.

$$S_{IIB} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left( e^{-2\phi} (R + (\nabla\phi)^2) - \frac{1}{5!} (F^5)^2 \right) \tag{B.53}$$

Om een oplossing te vinden, beginnen we van een lichtjes andere Ansatz deze keer, namelijk

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{1}{\sqrt{h}} \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + \sqrt{h} \delta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta \\
h &= h(X^\alpha) \tag{B.54}
\end{aligned}$$

Nu we over een algemene Ricciscalar beschikken, dienen we deze Ansatz niet meer volledig door te werken met behulp van spinconnecties etc. Het volstaat om  $H^2 = \text{sqrth}$  te substitueren. Echter, hier zijn enkele subtiliteiten aan verbonden. Het omzetten van de verschillende afgeleiden geeft aanleiding tot extra termen, maar als we onze combinaties van afgeleiden slim kiezen, kunnen we ons werk tot een minimum beperken. De eerste substitutie die we maken ligt voor de hand

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{H} &= \frac{\partial h^{1/4}}{h^{1/4}} \\
&= \frac{\partial h}{4h^{3/4}h^{1/4}} = \frac{\partial h}{4h} \\
&\Downarrow \\
X &= \frac{1}{16} \left( \frac{\partial h}{h} \right)^2
\end{aligned} \tag{B.55}$$

In plaats van  $Y$  te herschrijven in termen van  $h$ , zal het nuttig blijken om ons te focussen op de combinatie  $Y - X$ , die we voor gebruiksgemak  $Z$  zullen dopen.

$$\begin{aligned}
Z = Y - X &= \frac{\square H}{H} - \frac{(\partial H)^2}{H^2} \\
&= \partial \left( \frac{\partial H}{H} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{\square h}{h} - \frac{(\partial h)^2}{h^2} \right)
\end{aligned} \tag{B.56}$$

Als we dan deze  $Z$  introduceren in de Ricciscalar B.51 en verder uitwerken.

$$\begin{aligned}
H^2 R &= \rho(d - n) + X(2n - 4 - 4d) + Y(d - n + 2) \\
&= (d - n)(X(n - d - 2) - X + Y) + (n - d - 2 + n - 3d - 2)X + Y(d - n + 2) \\
&= (d - n)(Z - X(n - d - 2)) + Z(d - n - 2) + X(n - 3d - 2) \\
&= 2(a + 1)Z - (a + 2)(a + 1)X - 2dX
\end{aligned} \tag{B.57}$$

waarbij in de laatste regel nog de substitutie  $a = d - n$  werd doorgevoerd. Deze vorm kunnen we snel uitwerken door B.56 en B.55 in te vullen, dit geeft ons

$$H^2 R = 2(a + 1) \frac{1}{4} \left( \frac{\square h}{h} - \frac{(\partial h)^2}{h^2} \right) - (a + 2)(a + 1) \frac{1}{16} \left( \frac{\partial h}{h} \right)^2 - 2d \frac{1}{16} \left( \frac{\partial h}{h} \right)^2 \tag{B.58}$$

Indien we dan de waarden voor de dimensies  $d = 4$  en  $n = 6$  invullen (6 transversale dimensies vertelt ons dat dit een  $D3$ -braan betreft), krijgen we  $a = -2$  en dit invullen in de Ricciscalar geeft ons zo

$$\begin{aligned}
\sqrt{h}R &= -\frac{1}{2} \frac{\square h}{h} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{h} \right)^2 - \frac{8}{16} \left( \frac{\partial h}{h} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\square h}{h} = 0 \\
&\Downarrow \\
\square h &= 0
\end{aligned} \tag{B.59}$$

Waarmee dan aangetoond is dat ook  $h$  een harmonische functie dient te zijn. Onze Ansatz B.54 beschrijft dus een  $D3$ -braan, met  $h$  een harmonische functie.

# Appendix C

## BPS-toestand

Het begrip *BPS-toestand* stamt uit supersymmetrie. In deze appendix geven we een zeer kort overzicht<sup>1</sup> van representaties van de (uitgebreide) supersymmetrie-algebra in verschillende concrete gevallen, met dan als sluitstuk het zien verschijnen van de BPS-limiet. We volgen hierbij de structuur van [32] van nabij. Gezien de supersymmetrie-algebra een veralgemening is van de Poincaré-algebra, wordt dat ons startpunt.

### C.1 Poincaré-symmetrie

De Poincarégroep bevat alle symmetrieën van speciale relativiteit. Als generators van deze groep hebben we  $M^{\mu\nu}$  en  $P^\mu$ .  $M^{\mu\nu}$  is samengesteld uit de generatoren  $J_i$  van de rotaties en  $K_i$  van de boosts als volgt

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk} \quad (\text{C.1})$$

$$K_i = M_{0i} \quad (\text{C.2})$$

De algebra van de Poincarégroep is dan

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\sigma] = i(P^\mu\eta^{\nu\sigma} - P^\nu\eta^{\mu\sigma}) \quad (\text{C.4})$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(M^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + M^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - M^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - M^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}) \quad (\text{C.5})$$

### C.2 Supersymmetrie-algebra

Om de overgang te maken naar supersymmetrie<sup>2</sup> voegen we volgende anticommutator toe aan de Poincaré-algebra.

---

<sup>1</sup>Voor meer achtergrond, cf. [35] [36]

<sup>2</sup>In dit geval  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetrie. Vanaf  $\mathcal{N} > 1$  spreken we van uitgebreide supersymmetrie.



$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \quad (\text{C.6})$$

Waarbij  $\sigma^\mu$  een viervector is, met als componenten de Paulimatrices  $\sigma^i$

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (\mathbb{1}, \sigma^i) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

### C.2.1 Massaloos supermultiplet

We beginnen met een massaloos deeltje, waarvoor geldt

$$p^\mu = (E, 0, 0, E) \quad (\text{C.8})$$

De Casimiroperatoren worden gedefinieerd als

$$\begin{aligned} C_1 &= P^\mu P_\mu = 0 \\ \tilde{C}_2 &= C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Om de verschillende toestanden te bestuderen, kijken we eerst naar de anticommutator

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2E(\sigma^0 + \sigma^3)_{\alpha\dot{\beta}} = 4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}} \quad (\text{C.10})$$

waaruit volgt  $Q_2 = 0$ . Slechts de helft van de supersymmetrieën overleeft in dit geval. Indien we dan de creatie- en annihilatie-operatoren definiëren als

$$a = \frac{Q_1}{2\sqrt{E}} \quad \text{en} \quad a^\dagger = \frac{\bar{Q}_1}{2\sqrt{E}} \quad (\text{C.11})$$

en nemen we dan een toestand  $|\Omega\rangle = |p^\mu, \lambda\rangle$  als grondtoestand (een toestand die geannihileerd wordt door alle annihilatoren) dan kan men aantonen dat de creatieoperator C.11 de heliceit met 1/2 verhoogt. De toestanden in dit multiplet worden in dit geval

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= |p^\mu, \lambda\rangle \\ a^\dagger |\Omega\rangle &= |p^\mu, \lambda + 1/2\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

## C.2.2 Massief supermultiplet

Bij een massief deeltje

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0) \quad (\text{C.13})$$

wordt de anticommutator

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2m(\sigma^0)_{\alpha\dot{\beta}} = 4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}} \quad (\text{C.14})$$

De gerelateerde creatie- en annihilatie-operatoren worden dan

$$a_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{\sqrt{2m}} \quad \text{en} \quad a_{1,2}^\dagger = \frac{\bar{Q}_{1,2}}{\sqrt{2m}} \quad (\text{C.15})$$

Dit geeft aanleiding tot de volgende toestanden

toestand	aantal
$ \Omega\rangle$	1 x spin 0
$a_\alpha^\dagger  \Omega\rangle$	2 x spin 1/2
$a_\alpha^\dagger a_{\dot{\beta}}^\dagger  \Omega\rangle$	1 x spin 0

## C.3 Uitgebreide supersymmetrie

Niets houdt ons tegen om meerdere supersymmetrieën te introduceren in ons systeem. We dienen hiervoor enkel de algebra C.6 te veralgemenen tot

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} &= 2(\sigma^{mu})_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \delta_B^A \\ \{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} &= \epsilon_{\alpha\beta} Z^{AB} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

met  $Z^{AB} = -Z^{BA}$  de *centrale lading*.

### C.3.1 Massaloze representaties van $\mathcal{N} > 1$ supersymmetrie

De anticommutator wordt in het massaloze geval

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}} \delta_B^A \quad (\text{C.17})$$

Hieruit volgt dat  $Q_2^A = 0$  en ook dat  $Z^{AB} = 0$ , de centrale lading valt weg in het massaloze geval. Wederom definiëren we creatie- en annihilatie-operatoren

$$a^A = \frac{Q_1^A}{2\sqrt{E}} \quad \text{en} \quad a^{A\dagger} = \frac{\bar{Q}_1^A}{2\sqrt{E}} \quad (\text{C.18})$$

Hiermee bouwen we dan de verschillende toestanden

toestand	heliciteit	aantal
$ \Omega\rangle$	$\lambda_0$	$1 = \binom{\mathcal{N}}{0}$
$a^{A\dagger} \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1/2$	$\mathcal{N} = \binom{\mathcal{N}}{1}$
$a^{A\dagger}a^{B\dagger} \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1$	$\frac{1}{2!}\mathcal{N}(\mathcal{N}-1) = \binom{\mathcal{N}}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a^{\mathcal{N}\dagger}\dots a^{1\dagger} \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{\mathcal{N}}{2}$	$1 = \binom{\mathcal{N}}{\mathcal{N}}$

Het totale aantal toestanden wordt dan

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} \binom{\mathcal{N}}{k} = 2^{\mathcal{N}} \quad (\text{C.19})$$

Wat we overigens ook direct kunnen inzien als we een algemene toestand formuleren als

$$f^{\mathcal{N}\dagger}\dots f^{1\dagger}|\Omega\rangle \quad (\text{C.20})$$

waarbij dan voor elke van de  $\mathcal{N}$  functies  $f$  geldt

$$f^{\mathcal{N}\dagger} = 1 \quad \text{of} \quad f^{\mathcal{N}\dagger} = a^{\mathcal{N}\dagger} \quad (\text{C.21})$$

Wat ons ook  $2^{\mathcal{N}}$  mogelijkheden geeft om een algemene toestand te bouwen.

### C.3.2 Massieve representaties van $\mathcal{N} > 1$ supersymmetrie

De anticommutator C.16 wordt nu

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 2m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}} \delta_B^A \quad (\text{C.22})$$

Nu is het mogelijk dat  $Z^{ab} \neq 0$ . We behandelen dit geval per geval.

**Zonder centrale lading:**  $Z^{AB} = 0$

De creatie- en annihilatie-operatoren worden hier

$$a_\alpha^A = \frac{Q_\alpha^A}{\sqrt{2m}} \quad \text{en} \quad a_{\dot{\alpha}}^{A\dagger} = \frac{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^A}{\sqrt{2m}} \quad (\text{C.23})$$

In  $\mathcal{N} = 2$  supersymmetrie bekomen we dan volgende toestanden

toestand	spin	aantal
$ \Omega\rangle$	0	1
$a_{\dot{\alpha}}^{A\dagger} \Omega\rangle$	$\frac{1}{2}$	4
$a_{\dot{\alpha}}^{A\dagger}a_{\dot{\beta}}^{B\dagger} \Omega\rangle$	0	3
$a_{\dot{\alpha}}^{A\dagger}a_{\dot{\beta}}^{B\dagger}a_{\dot{\gamma}}^{C\dagger} \Omega\rangle$	$\frac{1}{2}$	3
$a_{\dot{\alpha}}^{A\dagger}a_{\dot{\beta}}^{B\dagger}a_{\dot{\gamma}}^{C\dagger}a_{\dot{\delta}}^{D\dagger} \Omega\rangle$	1	4
$a_{\dot{\alpha}}^{A\dagger}a_{\dot{\beta}}^{B\dagger}a_{\dot{\gamma}}^{C\dagger}a_{\dot{\delta}}^{D\dagger} \Omega\rangle$	1	1

Dit geeft ons in totaal  $2^{2\mathcal{N}}$  toestanden, een verdubbeling tegenover het massaloze geval. Verderom kan dit ook ingezien worden door te kijken naar een algemene toestand

$$f_1^{1\dagger} \dots f_1^{\mathcal{N}\dagger} f_2^{1\dagger} \dots f_2^{\mathcal{N}\dagger} |\Omega\rangle \quad (\text{C.24})$$

Waarbij elke  $f$  2 waardes<sup>3</sup> kan aannemen.

**Met centrale lading:**  $Z^{AB} \neq 0$

We definiëren de scalaire grootheid  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = (\bar{\sigma}^0)^{\dot{\beta}\alpha} \{Q_\alpha^A - \Gamma_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}A} - \bar{\Gamma}_{\dot{\beta}A}\} \quad (\text{C.25})$$

waarbij  $\Gamma_\alpha^A$  gedefinieerd is als

$$\Gamma_\alpha^A = \epsilon_{\alpha\beta} U^{AB} \bar{Q}_{\dot{\gamma}} (\bar{\sigma}^0)^{\dot{\gamma}\beta} \quad (\text{C.26})$$

met  $UU^\dagger = \mathbf{1}$ , oftewel  $U$  een unitaire matrix. Wegens een som van producten van de vorm  $XX^\dagger$  geldt

$$\mathcal{H} \geq 0 \quad (\text{C.27})$$

Indien we  $\mathcal{H}$  expliciet uitwerken verkrijgen we

---

<sup>3</sup>Namelijk 1 of  $a_i^{X\dagger}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= 8m\mathcal{N} - 2\text{Tr}\{ZU^\dagger + UZ^\dagger\} \\
&= 8m\mathcal{N} - 4\text{Tr}H \\
&= 8m\mathcal{N} - 4\text{Tr}\sqrt{Z^\dagger Z} \\
&\Downarrow \\
m &\geq \frac{1}{2\mathcal{N}}\text{Tr}\sqrt{Z^\dagger Z} \tag{C.28}
\end{aligned}$$

Deze ongelijkheid is de BPS-limiet. Toestanden met minimale massa, waarbij deze limiet gesatureerd is, worden *BPS-toestanden*<sup>4</sup> genoemd. In deze toestanden geldt er  $Q_\alpha^A - \Gamma_\alpha^A = 0$ . Dit heeft als gevolg dat het multiplet ingekort wordt. Een effect volledig analoog aan het verdwijnen van  $Q_2^A$  in het massaloze geval, met ook hetzelfde gevolg, een reductie van het aantal toestanden  $2^{2\mathcal{N}} \rightarrow 2^\mathcal{N}$ .

---

<sup>4</sup>Naar de ontdekkers Bogomolnyi, Prasad en Sommerfeld

## Appendix D

# Reissner-Nordströmmetrik

De Reissner-Nordströmmetrik is een zwart gat oplossing van de Einsteinvergelijkingen in vacuüm [16] [39]. Het is een statische oplossing, die naast een massa  $M$  ook nog een lading  $Q$  draagt. De standaard Reissner-Nordström (RN) metrik is

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2 d\Omega_2 \quad (\text{D.1})$$

Dit is de oplossing in 4 dimensies. In  $d$  dimensies wordt de RN-metrik [47]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r^{d-3}} + \frac{Q^2}{r^{2(d-3)}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r^{d-3}} + \frac{Q^2}{r^{2(d-3)}}} + r^2 d\Omega_{d-2} \quad (\text{D.2})$$

De horizon van dit zwart gat wordt gevonden wanneer  $1 - \frac{2M}{r^{d-3}} + \frac{Q^2}{r^{2(d-3)}} = 0$ , dit is in principe een gewone vierkantsvergelijking voor  $r^{d-3}$ , en levert ons twee oplossingen

$$r_{\pm}^{d-3} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (\text{D.3})$$

De  $r_+$  is de *event horizon*, de  $r_-$  is de *Cauchy horizon*. Indien ze samenvallen ( $r_+ = r_- = r_e$ ) spreken we van een extremaal RN-zwart gat. De oplossing kan ook herschreven worden in termen van deze twee horizons. De metrik neemt dan volgende vorm aan

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_-^{d-3}}{r^{d-3}}\right)\left(1 - \frac{r_+^{d-3}}{r^{d-3}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_-^{d-3}}{r^{d-3}}\right)\left(1 - \frac{r_+^{d-3}}{r^{d-3}}\right)} + r^2 d\Omega_{d-2} \quad (\text{D.4})$$

de parameters  $M$  en  $Q$  kunnen dan geschreven worden als

$$\begin{aligned}
Q &= \sqrt{r_+^{d-3} r_-^{d-3}} \\
2M &= r_+^{d-3} + r_-^{d-3}
\end{aligned}
\tag{D.5}$$

## D.1 Entropieberekening van het vijfdimensionaal zwart gat

We gaan ons nu concreet toespitsen op het vijfdimensionale geval. De parameters  $M$  en  $Q$  zijn in dit geval

$$2M = r_+^2 + r_-^2 \quad \text{en} \quad Q = r_+ r_- \tag{D.6}$$

In wat volgt bekommeren we ons niet om constanten, maar enkel om functionele afhankelijkheden, kwestie van de notatie zo veel mogelijk te verlichten. Voor de entropie  $S$  geldt

$$\begin{aligned}
S \sim A &\sim r_+^{d-2} = r_+^3 \\
&= (M + \sqrt{M^2 - Q^2})^{3/2}
\end{aligned}
\tag{D.7}$$

We gaan nu op zoek naar de verandering in de metriek wanneer we wegperturberen van een extremale toestand, waarbij we de lading constant houden.

$$S' = (M' + \sqrt{M'^2 - Q^2})^{3/2} \tag{D.8}$$

We stellen  $M' = M + \delta M$  en  $Q = M$ , omdat we van een extremale toestand<sup>1</sup> wegperturberen. Voor  $\Delta S$  vinden we zo

$$\begin{aligned}
\Delta S &= S' - S \\
&= (M + \delta M + \sqrt{(M + \delta M)^2 - M^2})^{3/2} - M^{3/2}
\end{aligned}
\tag{D.9}$$

Dit geeft dan uiteindelijk

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta S}{S} &= \frac{\left(M + \delta M + \sqrt{(M + \delta M)^2 - M^2}\right)^{3/2} - M^{3/2}}{M^{3/2}} \\
&\approx \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\delta M}{M}} + \frac{9}{4} \frac{\delta M}{M} + \sqrt{2} \left(\frac{\delta M}{M}\right)^{3/2} + \mathcal{O}(\delta M/M)^2
\end{aligned}
\tag{D.10}$$

---

<sup>1</sup> $M = Q$  is typisch voor een extremale toestand, om dit expliciet te zien stel  $r_+ = r_- = r_e$  in D.6.

# Bibliografie

- [1] D. Teerlink and H. Verschelde, “Snaren en branen,” *Lecture notes* .
- [2] D. Tong, “String Theory,” [arXiv:0908.0333](https://arxiv.org/abs/0908.0333) [[hep-th](#)].
- [3] A. M. Uranga, “Introduction to string theory,” *Lecture notes* (2005) .  
<http://members.ift.uam-csic.es/auranga/>.
- [4] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*. A First Course in String Theory. Cambridge University Press, 2004.
- [5] P. H. Ginsparg, “APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY,” [arXiv:hep-th/9108028](https://arxiv.org/abs/hep-th/9108028) [[hep-th](#)].
- [6] K. Becker, M. Becker, and J. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2006.
- [7] J. Polchinski, *String Theory: Volume 1, An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1998.  
[https://books.google.be/books?id=jbM3t\\_usmX0C](https://books.google.be/books?id=jbM3t_usmX0C).
- [8] T. Jacobson, “Introductory lectures on black hole thermodynamics,”
- [9] J. M. Maldacena, “Black holes in string theory,” [arXiv:hep-th/9607235](https://arxiv.org/abs/hep-th/9607235) [[hep-th](#)].
- [10] M. Blau, “Supergravity solitons,” *Lecture notes* (1998) .  
<http://www.unine.ch/phys/string/mblau/mblau.html>.
- [11] K. Stelle, “Lectures on supergravity p-branes,” [arXiv:hep-th/9701088](https://arxiv.org/abs/hep-th/9701088) [[hep-th](#)].
- [12] G. T. Horowitz and A. Strominger, “Black strings and P-branes,” *Nucl.Phys.* **B360** (1991) 197–209.
- [13] A. W. Peet, “TASI lectures on black holes in string theory,” [arXiv:hep-th/0008241](https://arxiv.org/abs/hep-th/0008241) [[hep-th](#)].
- [14] C. V. Johnson, “D-brane primer,” [arXiv:hep-th/0007170](https://arxiv.org/abs/hep-th/0007170) [[hep-th](#)].
- [15] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*, vol. 1. 2004.



- [16] M. Blau, “Lecture notes on general relativity,” *Lecture notes* (2014) .  
<http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>.
- [17] W. Siegel, “Fields,” *Lecture notes* (1999) , [arXiv:hep-th/9912205](https://arxiv.org/abs/hep-th/9912205) [hep-th].
- [18] O. Aursjø, “Microscopic black holes and extra dimensions.,” *Candidatus Scientiarum thesis* (2005) . <http://folk.uio.no/olavau/thesis.pdf>.
- [19] J. Callan, Curtis G., J. A. Harvey, and A. Strominger, “World sheet approach to heterotic instantons and solitons,” *Nucl.Phys.* **B359** (1991) 611–634.
- [20] C. V. Johnson, *D-branes*. Cambridge university press, 2002.
- [21] I. V. Vanea, “Introductory lectures on d-branes,” *arXiv preprint* (2008) ,  
[arXiv:hep-th/0109029](https://arxiv.org/abs/hep-th/0109029) [hep-th].
- [22] C. G. Callan and J. M. Maldacena, “D-brane approach to black hole quantum mechanics,” *Nucl.Phys.* **B472** (1996) 591–610, [arXiv:hep-th/9602043](https://arxiv.org/abs/hep-th/9602043) [hep-th].
- [23] T. Mohaupt, “Black holes in supergravity and string theory,” *Class.Quant.Grav.* **17** (2000) 3429–3482, [arXiv:hep-th/0004098](https://arxiv.org/abs/hep-th/0004098) [hep-th].
- [24] K. Skenderis, “Black holes and branes in string theory,” *Lect.Notes Phys.* **541** (2000) 325–364, [arXiv:hep-th/9901050](https://arxiv.org/abs/hep-th/9901050) [hep-th].
- [25] S. R. Wadia, “Lectures on the microscopic modeling of the 5-dimension black hole of IIB string theory and the D(1) / D(5) system,” [arXiv:hep-th/0006190](https://arxiv.org/abs/hep-th/0006190) [hep-th].
- [26] G. T. Horowitz, J. M. Maldacena, and A. Strominger, “Nonextremal black hole microstates and u-duality,” *Physics Letters B* **383** no. 2, (1996) 151–159.
- [27] C. G. Callan and J. M. Maldacena, “D-brane approach to black hole quantum mechanics,” *Nucl.Phys.* **B472** (1996) 591–610, [arXiv:hep-th/9602043](https://arxiv.org/abs/hep-th/9602043) [hep-th].
- [28] M. Cvetič and D. Youm, “General rotating five-dimensional black holes of toroidally compactified heterotic string,” *Nucl.Phys.* **B476** (1996) 118–132, [arXiv:hep-th/9603100](https://arxiv.org/abs/hep-th/9603100) [hep-th].
- [29] S. R. Das and S. Mathur, “The quantum physics of black holes: Results from string theory,” *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.* **50** (2000) 153–206, [arXiv:gr-qc/0105063](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0105063) [gr-qc].
- [30] A. Sen, “An Introduction to nonperturbative string theory,” [arXiv:hep-th/9802051](https://arxiv.org/abs/hep-th/9802051) [hep-th].
- [31] S. Mathur, “Making black hole microstates,” *Lecture notes* (2009) .  
<https://indico.cern.ch/event/37753/contribution/22/material/slides/0.pdf>.
- [32] F. Quevedo, S. Krippendorff, and O. Schlotterer, “Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions,” [arXiv:1011.1491](https://arxiv.org/abs/1011.1491) [hep-th].

- [33] G. Mandal, “A Review of the D1 / D5 system and five-dimensional black hole from supergravity and brane viewpoint,” [arXiv:hep-th/0002184](#) [hep-th].
- [34] J. R. David, “String theory and black holes,” [arXiv:hep-th/9911003](#) [hep-th].
- [35] S. P. Martin, *A supersymmetry primer*, vol. 1. World Scientific, Singapore, 2010. [arXiv:hep-ph/9709356](#) [hep-ph].
- [36] R. Argurio, “Introduction to supersymmetry,” *Lecture notes* (2011) .  
<http://www.physics.uc.edu/~argyres/661/susy2001.pdf>.
- [37] B. Gripaios, “Gauge field theory,” *lecture notes* (2013) .
- [38] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy,” *Phys.Lett.* **B379** (1996) 99–104, [arXiv:hep-th/9601029](#) [hep-th].
- [39] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [40] A. Dabholkar and S. Nampuri, “Quantum black holes,” *Lect.Notes Phys.* **851** (2012) 165–232, [arXiv:1208.4814](#) [hep-th].
- [41] P. Townsend, “Black holes: Lecture notes,” [arXiv:gr-qc/9707012](#) [gr-qc].
- [42] D. Tong, “Statistical Physics,” *Lecture notes* (2009) .  
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys/sp.pdf>.
- [43] J. Ryckebusch, “Statistische Fysica,” *Lecture notes* (2012) .
- [44] E. D’Hoker and D. Z. Freedman, “Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence,” [arXiv:hep-th/0201253](#) [hep-th].
- [45] R. Argurio, “Brane physics in M theory,” [arXiv:hep-th/9807171](#) [hep-th].
- [46] J. McGreevy, “8.821 String Theory,” *Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare* (Fall 2008) . <http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-821-string-theory-fall-2008/index.htm#>.
- [47] J. E. Āman and N. Pidokrajt, “Geometry of higher-dimensional black hole thermodynamics,” *Physical Review D* **73** no. 2, (2006) 024017, [arXiv:hep-th/0510139](#) [hep-th].